No: 02 2025
http://doi.org/10.64400/ndueej.050
ISSN 2224-5529 2224-0829 2223-5124 2222-940X

NAXÇIVAN DÖVLƏT UNİVERSİTETİNİN ELMİ ƏSƏRLƏR JURNALI

SİNİF-SİNİF İNTEQRALLAMA METODU

[1]Miryasin Eminov

https//orcid.org/0009-0009-2418-6333

[2]Cəfərova Zivər Şahin qızı

https//orcid.org//0009-0009-3671-1924
nesrin.ceferli@gmail.com
[1,2]Naxıçıvan Dövlət Universiteti, Naxçıvan, Azərbaycan.

Yazışılan müəllif: m.selimeminov@mail.ru ; Tel: +994 552443475

XÜLASƏ

Qeyri-müəyyən inteqral hesbında metodlar inteqralaltı ifadələrə görə müəyyənləşir. Inteqralaltı ifadə müəyyən sinif olduqda – məsələn rasional kəsr olduqda sadə kəsrlərə ayrılış metodundan istifadə olunur və s. Metod rasional kəsr və rasional çevirlmələrlə rasional kəsrə gətirilən (yaxud əvəzləmələrlə), sonra isə sadə kəsrlərə ayrılan ifadələr üçün yarayır. Məlum siniflərdən heç birinə daxil olmayan və ya müxtəlif siniflərdən olan funksiyalar vasitəsi ilə düzəldilən ifadələrin inteqrallama metodları yoxdur. İlk addımlardan biri olaraq aşağıda yeni metod verilir. Metodla açılmaz hesab olunan inteqralların bir qismini açmaq mümkündür.

Açar sözlər: *inteqral, sinif sinif inteqrallama, metod, açılmayan inteqral ,isbat,tətbiq.*

Əvvəlcə sadə bir misala baxaq.

$$\int\left(\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}+\frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}}\right)dx$$

Toplananların hər birini hesablayıb toplasaq inteqralın nəticəsini alarıq.

I üsul. Ən sadə hesablama yollarından biri aşağıdakı kimidir. Hissə hissə inteqrallama metodunu tətbiq edirik

$$\int\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}dx=2\int\sqrt{x+a}\,d\sqrt{x+b}=2\left(\sqrt{x+a}\cdot\sqrt{x+b}-\int\sqrt{x+b}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+a}}dx\right)=2\sqrt{x+a}\cdot\sqrt{x+b}-$$
$$-\int\frac{\sqrt{x+b}}{x+a}dx$$

sağdakı inteqralı sol tərəfə keçirsək

$$\int\left(\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}+\frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}}\right)dx=2\sqrt{x+a}\cdot\sqrt{x+b}+C \qquad (1)$$

alarıq.

II üsul. İnteqralaltı ifadəni ortaq məxrəcə gətirib, inteqralı hesablayaq

$$\int\left(\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}+\frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}}\right)dx=\int\frac{x+a+x+b}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}dx=\int\frac{2x+a+b}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}}dx=\int\frac{d\left(x^2+(a+b)x+ab\right)}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}}dx=$$

$$=\int\left(x^2+(a+b)x+ab\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2+(a+b)x+ab\right)=2\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+C=2\sqrt{(x+a)(x+b)}+C$$

Bərabərliyin əvvəli ilə sonunu birləşdirsək

$$\int\left(\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}+\frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}}\right)dx=2\sqrt{(x+a)(x+b)}+C$$

əvvəl aldığımız cavabı alarıq.

Sual olunur: $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları hansı şərtləri ödəməlidirlər ki, (1) bərabərliyi doğru olsun, yəni

$$\int\left(\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{g(x)}{f(x)}\right)dx=2f(x)g(x)+C \qquad (*)$$

bərabərliyi ödənsin. Eyni qayda ilə

$$\int\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right)dx=2f(x)g(x)+C \qquad (2)$$

şəklində bərabərliyin ödənməsi üçün $f(x)$ və $g(x)$ necə olmalıdır?

Göründüyü kimi bu metodun ənənəvi metodlardan fərqi ondan ibarətdir ki, bu metod üçün $f(x)$ və $g(x)$ (o cümlədən $\frac{f(x)}{g(x)}$ və $\frac{g(x)}{f(x)}$) eyni bir sinfə daxil olmaya da bilər. Klassik metodlar isə müəyyən siniflər üçündür. (*) halı M.S.Eminov tərəfindən işlənmişdir. Biz (2) halına baxaq.

(2) düsturunun hər tərəfindən törəmə alsaq

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}=2\left(f(x)g(x)\right)'$$

alarıq, buradan

$$f(x)^2-g(x)^2=2f(x)g(x)\left(f(x)g(x)\right)'$$

$$f(x)^2-g(x)^2=\left(f(x)^2g(x)^2\right)' \qquad (3)$$

Fərz edək ki, $f(x)$ verilmişdir. Onda bu $f(x)$ -lə (3) və deməli (2) şərtini ödəyən $g(x)$ necə olmalıdır? $g(x)$-si tapmaq üçün $g(x)^2$=y işarə edək. Onda (3)

$$f(x)^2-y=\left(f(x)^2y\right)'$$

şəklini alar. Çevirsək

$$f(x)^2-y=2f(x)f'(x)y+f(x)^2y'$$

$$f(x)^2y'+\left(2f(x)f'(x)+1\right)y=f(x)^2$$

$$y'+\left(2\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{f(x)^2}\right)y=1 \qquad (4)$$

tənliyini almış oluruq. Bu xətti diferensial tənllikdir. Onu həll edək. Əvvəlcə uyğun bircins tənliyin həllini tapaq

$$y'+\left(2\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{f(x)^2}\right)y=0 \qquad (5)$$

$$\frac{y'}{y}=-2\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{f(x)^2}$$

$$\ln|y|=-2\ln|f(x)|-\int\frac{dx}{f(x)^2}+\ln|C|$$

$$y=\frac{C}{f(x)^2}e^{-\int\frac{dx}{f(x)^2}} \qquad (6)$$

(6), (5)-in ümumi həllidir. Sabitlərin variasiyası metodu ilə (4)-ün ümumi həllini tapaq.

$$y=\frac{C(x)}{f(x)^2}e^{-\int\frac{dx}{f(x)^2}} \qquad (6')$$

Bunu (4)-də yerinə yazaq. Yazdıqdan sonra oxşar hədləri islah etsək

$$\frac{C'(x)}{f(x)^2}e^{-\int\frac{dx}{f(x)^2}}=1$$

$$C'(x)=f(x)^2e^{\int\frac{dx}{f(x)^2}}$$

$$C(x)=\int f(x)^2e^{\int\frac{dx}{f(x)^2}}dx+C_1$$

alarıq. Bunu (6^1) bərabərliyində yerinə yazaq

$$y=\left(\int f(x)^2e^{\int\frac{dx}{f(x)^2}}dx+C_1\right)\frac{1}{f(x)^2}e^{-\int\frac{dx}{f(x)^2}}$$

Bu, (4)-ün ümumi həllidir. $g(x)^2$=y olduğunu nəzərə alsaq, alarıq:

$$\begin{cases} f(x) \\ g(x)=\sqrt{C(x)\dfrac{1}{f(x)^2}e^{-\int\frac{dx}{f(x)^2}}}=\dfrac{1}{f(x)}\sqrt{\int f(x)^2e^{\int\frac{dx}{f(x)^2}}dx+C_1}\,e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{f(x)^2}} \end{cases} \qquad (7)$$

Aldıq ki, bu funksiyalar cütü $(2')$ tənliyini ödəyir. Yəni $f(x)$ funksiyası ilə (2) tənliyini ödəyən funksiyalar sinifi

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}\sqrt{\int f(x)^2e^{\int\frac{dx}{f(x)^2}}dx+C_1}\,e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{f(x)^2}}$$

şəklində funksiyalardır. Bu f(x) verildikdə (2) bərabərliyini ödəyən g(x) funksiyasını tapmaq üçün düsturdur.

İndi isə düsturun sadə tətbiqlərinə baxaq.

Misal 1. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyası ilə (2) bərabərliyini ödəyən g(x) funksiyasını tapın.
Həlli.

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}\sqrt{\int f(x)^2 e^{\int\frac{dx}{f(x)^2}}dx+C_1 e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{f(x)^2}}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\int(\sqrt{x})^2 e^{\int\frac{dx}{(\sqrt{x})^2}}+Ce^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(\sqrt{x})^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\int xe^{\ln|x|}+Ce^{-l\frac{1}{2}n|x|}}=\frac{\sqrt{\frac{x3}{3}+C}}{x}$$

Funksiyasını almış olduq. Aldıq ki,

$$\int\left(\frac{\sqrt{x}}{\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C}}{x}}-\frac{\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C}}{x}}{\sqrt{x}}\right)dx=2\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C_1}}{x}+C_2$$

$$\int\left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C_1}}-\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C_1}}{x\sqrt{x}}\right)dx=2\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C_1}}{\sqrt{x}}+C_2$$

Bu misalın çox maraqlı bir cəhəti də vardır. İnteqralaltı ifadədəki ifadələrin hər biri binomial diferensial ifadələrdir və inteqrallanmırlar. Yəni binomial diferensialların inteqrallanması üçün verilən üç şərtdən heç birini ödəmirlər. Buna baxmayaraq inteqral hesablanmışdır. Bu bir daha alınmış metodun əhəmiyyətini ortaya qoyur: metodla, inteqrallanmayan hesab olunan inteqralların bir qismini açmaq mümkün olur. Deyilənlər təkcə binomial diferensial ifadələrə aid deyil. Başqa bir qisim inteqrallar da var ki, inteqrallanmırlar, ancaq metod onlara da tətbiq oluna bilir.

Metodun Tətbiq imkanları bunlarla məhdud deyil.

Nəticə . $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üçün (2) bərabərliyi doğrudursa,

$$\int\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right)dx=2f(x)g(x)+C$$

onda

$$\int\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right)\frac{1}{f(x)g(x)}dx=2\ln|f(x)g(x)|+C \qquad \text{və}$$

$$\int\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right)(f(x)g(x))^\alpha dx=2\frac{(f(x)g(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$$

bərabərlikləri də doğrudur. Bunları asanca isbat etmək olar.

Xüsusi halda

$$\int\left(f(x)^2-g(x)^2\right)dx=f(x)^2g(x)^2+C$$

Bərabərliyindən də istifadə oluna bilər.

Misal 1- qayıtsaq

$$\int\left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C_1}}-\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C_1}}{x\sqrt{x}}\right)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C}}dx=2\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}+C_1}}{\sqrt{x}}\right|+C_2$$

alarıq.

Bəzən g(x)-i tapmaq verilən inteqralı hesablamaqdan daha çətin olur. Xüsusi hallarda isə bu çox asan olur. Ona görə də xüsusi hallara baxmaq çox faydalı olur. 1. $\int\frac{dx}{f(x)^2}=\ln|h(x)|$ oldüqda,

$f(x)=\sqrt{\frac{h(x)}{h'(x)}}$ almış oluruq. Bunu (7) –də nəzərə alsaq

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}\sqrt{\int f(x)^2e^{\int\frac{dx}{f(x)^2}}dx+C_1e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{f(x)^2}}}=\sqrt{\frac{h'(x)}{h(x)}}\sqrt{\int\frac{h(x)}{h'(x)}e^{\ln|h(x)|}dx+C_1e^{-\frac{1}{2}\ln|h(x)|}}=$$

$$=\frac{\sqrt{h'(x)}}{h(x)}\sqrt{\int\frac{h^2(x)}{h'(x)}dx+C_1}$$

Bunları (2) –də yerinə yazsaq

$$\int\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right)dx=2f(x)g(x)+C\Leftrightarrow\int\left(\frac{\sqrt{\frac{h(x)}{h'(x)}}}{\frac{\sqrt{h'(x)}}{h(x)}\sqrt{\int\frac{h^2(x)}{h'(x)}dx+C_1}}-\frac{\frac{\sqrt{h'(x)}}{h(x)}\sqrt{\int\frac{h^2(x)}{h'(x)}dx+C_1}}{\sqrt{\frac{h(x)}{h'(x)}}}\right)dx=$$

$$=2\sqrt{\frac{h(x)}{h'(x)}}\cdot\frac{\sqrt{h'(x)}}{h(x)}\sqrt{\int\frac{h^2(x)}{h'(x)}dx+C_1}+C_2\Leftrightarrow\int\left(\frac{h(x)\sqrt{h(x)}}{h'(x)\sqrt{\int\frac{h^2(x)}{h'(x)}dx+C_1}}-\frac{h'(x)\sqrt{\int\frac{h^2(x)}{h'(x)}dx+C_1}}{h(x)\sqrt{h(x)}}\right)dx=$$

$$=2\frac{1}{\sqrt{h(x)}}\sqrt{\int\frac{h^2(x)}{h'(x)}dx+C_1}+C_2$$

Buradan aydınca görünür ki, əgər $\frac{h^2(x)}{h'(x)}$ inteqrallanan olarsa inteqral da açılan olar.

Metodun daha haralarda tətbiq oluna biməsi haqda təsəvvür yaratmaq üçün aşağıdakı qeydlər verilir.

Qeydlər.1.Məqalədə siniflər ənənəvi qaydada deyil-yəni görünüşə görə deyil, müəyyən şərtin ödənilməsinə görə müəyyənləşir.

2. İnteqrallar (2) şəklində deyil, $\int k(x)dx$ şəklində verilir.Buradan $\frac{f(x)}{g(x)},\frac{g(x)}{f(x)}$ nisbətlərinin tapılması qaydası verilə bilmədi.

3. Xüsusi halların yalnız birinə baxıldı.

4.Elə siniflər var ki, verilən şərti ödəmirlər, amma onları metodla inteqrallamaq olur.

5.İstənilən iki açılmayan inteqralın cəmi və ya fərqi inteqrallanan olmur, aid şərtlər verilməyibdir.

6.Məqalə sinif sinif inteqrallama metodunun (2) çəklində inteqrallara tətbiqidir. Ümumi hal deyil
7. Alinan nəticələrin diferensial tənliklərə tətbiqi verilmədi

Məqalədəki bütün faktlar yenidir və heç yerdə nəşr olunmamışdır.

РЕЗЮМЕ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО КЛАССАМ

Мирясин Эминов
Зивар Джафарова

При интегрировании неопределенных интегралов методы выбирают по классам под интегралной выражении. Если подинтегральное вырыжение рациональная функция, то применяются метод неопределенных коофициентов и т.п .Для интегривования выражений не входящая ни одного класса или образованная функций из разного класса обший путь нето. Метод как одно из щага в этом направлении дан ниже. С помошью этого метода можно открыт и часть невычисляемых интегралов.

Ключевые слова: *интеграл, интегрировать по классам, метод, доказательство. применение.*

SUMMARY

CLASS CLASS İNTEQRATİON METHOD

Miryasin Eminov
Cafarova Zivar

In indefinite inteqral calculus, the methods are determined accordinq to inteqral expressions. When the inteqral expression is of a certain class-for example, if it is a rational fraction, the method of division into simple fractions is used, etc.The method is suitable for rational fractions and expressions brouqht to rational fractions by rational transformations (or substitutions) . There are no inteqration methods for expressions that are not clearly qiven or do not belongq to any of the known classes. As a first step, a new method is qiven below.

Key words: *inteqral, class class inteqration, method , proof, application*