XUMAR NOVRUZOVA
novruzovaxumar@gmail.com
Bakı Slavyan Universiteti

İKT DƏSTƏYİ İLƏ KOMPLEKS ƏDƏDLƏR MEYDANINDA HƏLL EDİLƏN MƏSƏLƏLƏR SİSTEMİ

Məqalə ali məktəblərdə cəbr fənninin tədrisi metodikası məsələlərinə həsr edilmişdir. Məlumdur ki, ali məktəblərdə tədris olunan riyazi fənlər arasında cəbr fənni ən mürəkkəb fənlərdən biridir. Tələbələrin bu fənni daha yaxşı mənimsəmələri üçün müasir təlim texnologiyalarından, İKT imkanlarından istifadə edilməsi yaranan çətinlikləri aşmağa kömək edir. Məqalədə MS Excel, Matlab kompüter proqramlarında kompleks ədədlərə aid məsələlərin həlli təqdim edilir və bu mövzu ilə bağlı tədris proqramlarında nəzərə alınmalı olan təkliflər irəli sürülür.

Açar sözlər*: Cəbr, kompleks ədəd, kompleks kök, çoxhədli, İKT*

Mənfi ədəddən kvadrat kök alınması məsələsi R həqiqi ədədlər çoxluğunu genişləndirməyə və kompleks ədəd anlayışından istifadə etməyə ehtiyac yaratdı. Belə ki, bəzi həqiqi əmsallı kvadrat tənlikləri həll edərkən, həqiqi ədədlər çoxluğu kifayət etmir. Məsələn, $x^2+1=0$ tənliyinin həqiqi kökü yoxdur. Yalnız kvadrat tənlik deyil, cəbrdə və ümumiyyətlə, bir çox praktik məsələlərin həlli $a+b\sqrt{-1}$ şəklində verilən ifadələrə və bu ifadələr üzərində əməllərə gətirilir. Bu şəkildə olan ifadələrdəki $\sqrt{-1}$ simvolu həqiqi ədədlər çoxluğuna aid deyil. Ona görə də kompleks ədəd anlayışının daxil edilməsi ilə riyaziyyatda əslində müstəvinin bütün nöqtələrini sanki doldurmuş oluruq və həm də bütün tənliklərin həllini tapırıq. Bir çox riyaziyyatçıların (A. Kuroş, A. Suşkeviç, M.Əkbərov və b.) fikrincə, kompleks ədədə xəyali ədəd kimi baxmaq haqsızlıqdır, yuxarıda göstərilən səbəblərdən kompleks ədədi həqiqi ədəddən daha artıq dərəcədə həqiqi (təbii) saya bilərik. Ədəd anlayışının kompleks ədədlər çoxluğuna qədər genişlənməsi praktik məsələlərin həlli və riyaziyyatın öz daxili tələbatının məntiqi nəticəsi olaraq baş verir. Hər bir sonra yaranan ədədlər sistemi özündən əvvəlki sistemi inkar etmir, əksinə onu tamamlayaraq daha geniş, daha ümumi bir ədədlər sistemi yaratmış olur [6, s.110-113; 7, s.196-197].

$z=a+bi$ şəklində verilən kompleks ədəddə $a=Re\ z$ həqiqi hissə, $b=İm\ z$ isə xəyali hissədir. Deməli, bu ədədi z=Re z+i·İm z şəklində də yazmaq olar.

Kvadratı (-1)-ə bərabər olan *i* hərfi xəyali vahid adlanır, ilk dəfə 1777-ci ildə L.Eyler tərəfindən işlənmişdir. Xəyali ədəd anlayışını isə riyaziyyata R.Dekart daxil etmişdir. Ondan əvvəl C.Kardano bu ədədləri sofistik, anlaşılmaz ədədlər adlandırmışdır [5, s.145-146].

Həqiqi ədədləri ədəd oxu üzərində göstərə biliriksə, kompleks ədədlər R×R Dekart müstəvisində təsvir edilir. Bu halda absis oxu üzərində kompleks ədədin həqiqi hissəsi, ordinat oxu üzərində isə xəyali hissəsi təsvir edilir. Ona görə də absis oxuna həqiqi ox, ordinat oxuna isə xəyali ox deyilir. Beləliklə, müstəvinin hər bir nöqtəsinə bir kompleks ədəd uyğun gəlir. Koordinat başlanğıcını bu nöqtə ilə birləşdirsək, radius vektorla təsvir olunan kompleks ədəd alarıq. Bu isə bizə imkan verir ki, kompleks ədədlər üzərində toplama əməlini yerinə yetirmək üçün həmin ədədlərə uyğun olan radius vektorları paraleloqram qaydası ilə toplayaq [1, s.68; 6, s.119; 7, s.198]. Beləliklə, kompleks ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlər çoxluğunun genişlənməsidir (teorem).

Kompleks müstəvidə polyar koordinatları daxil edərək, koordinat başlanğıcı kimi O nöqtəsini, müsbət istiqamət kimi həqiqi oxu seçsək, kompleks ədədin triqonometrik şəkildə yazılışını alarıq: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Burada: $r=|z|$ kompleks ədədinin modulu, $\varphi=\arg z$ isə bu ədədin arqumenti adlanır. Kompleks ədədin arqumenti $-\pi<\arg z<\pi$ aralığında təyin edilir. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ formasındadır.

$z^n=1$ tənliyinin həlli vahidin n-ci dərəcədən kökü adlanır. Bu köklər $\mathcal{E}_k$ ilə işarə edilir. $z^2=1$ tənliyinin kökləri 1 və -1 olmaqla, vahidin 2-ci dərəcədən kökləridir. Vahid çevrənin üzərində kompleks ədədin modulunun vahidə bərabər olduğunu nəzərə alsaq, vahidin kökləri üçün $\mathcal{E}_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ (k=0, 1, 2,…., n-1) düsturunu alarıq.

Hər bir natural n ədədi üçün vahidin n-ci dərəcədən n sayda müxtəlif kökü var. Bu köklər mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu çevrənin daxilinə çəkilmiş düzgün n – bucaqlının təpə nöqtələridir (şəkil 1) [1, s.68-70].

Xətkeş və pərgarla yerinə yetirilən qurma məsələləri hələ qədim dövrlərdən vahidin köklərinin tapılması məsələsi ilə əlaqədar olaraq nəzərdən keçirilib. Düzgün **n** bucaqlının qurulması məsələləri ilə məşğul olarkən, riyaziyyatçılar müəyyən ediblər ki, heç də hər bir düzgün **n** bucaqlını xətkeş və pərgarın köməyilə qurmaq mümkün deyil. K.Qauss 7-bucaqlını qurmaq məsələsini həll etməyə çalışarkən, düzgün 17-bucaqlının qurulması məsələsini həll edir və bununla da, 1801-ci ildə isbat edir ki, yalnız 3, 5, 17, 257, 65537 bucaqlıların qurulması mümkündür. Bu günə qədər Ferma ədədləri adlanan bu ədədlərdən yalnız sadalanan ədədlər məlumdur: $F_n=2^{2^n}+1$ (n=0, 1, 2, 3, 4) [1, s.475].

Beləliklə, xətkeş və pərgarla qurma məsələsi rasional əmsallı çoxhədlinin köklərinin tapılması məsələsi ilə birbaşa əlaqədardır.

Kompleks ədədlər üzərində toplama, çıxma, vurma, bölmə, qüvvətə yüksəlmə və kökalma əməllərini təyin edərək, bu əməllərlə bağlı xassələr öyrədilir. Kompleks ədədin xəyali hissəsi olan i=0 qəbul etsək,

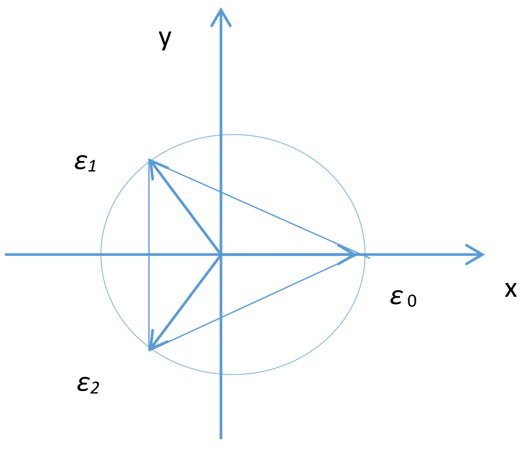
$$(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0),\ (a, 0)\cdot(b, 0)=(ab, 0)$$

alarıq. Bu bərabərliklər onu göstərir ki, kompleks ədədlər üzərində də həqiqi ədədlər kimi toplama və vurma əməllərini yerinə yetirmək olar.

C kompleks ədədlər meydanı, R həqiqi ədədlər meydanı və Q rasional ədədlər meydanı ədədi meydanlardır. Bu meydanların arasında ən böyük meydan C kompleks ədədlər meydanı, ən kiçik meydan isə Q rasional ədədlər meydanıdır. Hər bir P meydanı Q və C meydanları arasında yerləşən aralıq meydandır. Bu məntiqlə Q meydanına xəyali hissəni göstərən i-ni birləşdirsək, xəyali hissəsi olan ən kiçik olan meydan alarıq. Eyni qaydanı x^2-2=0 tənliyinin köklərinin tapılması məsələsini həll edərkən də tətbiq etmək olar. Belə ki, bu tənliyin Q rasional ədədlər meydanında heç bir kökü olmadığından, yaranan bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün heç də sonsuz sayda irrasional ədədlərə ehtiyac yoxdur. $\sqrt{2}$ ədədini bu meydana birləşdirərək, a+b$\sqrt{2}$ (a, b$\in Q$) şəklində olan ədədləri alırıq. Bu qayda ilə alınan Q(i) və Q($\sqrt{2}$) meydanları hesabidir [1, s.71-73].
$Q\subset P \subset C$

Kompleks ədədlərə aid tapşırıqların həllində praktik məzmunun demək olar ki, olmamasını mənfi hal kimi qiymətləndirə bilərik. Həm orta məktəb riyaziyyat kursunda, həm də ali məktəblərin cəbr kursunda təqdim edilən tapşırıqların arasında kompleks ədədlər üzərində əməllər, kompleks ədədin cəbri və triqonometrik formalarından bir-birinə keçid, vahidin köklərinin tapılması kimi

(Şəkil 1.)



məsələlərə üstünlük verilir. Lakin bu məsələlərin həlli zamanı tələbələr və şagirdlər kompleks ədədlərin praktik tətbiqi ilə bağlı heç bir informasiya əldə edə bilmirlər. Halbuki kompleks ədədlərin aşağıda nəzərdən keçirdiyimiz qrafik (koordinat müstəvisində) təsviri proqram materialına daxil olsa da, bir az daha dərindən araşdırılmalıdır. Belə ki, düzbucaqlı koordinat sistemində absis oxu üzərində

2 ədədinə uyğun olan nöqtəni qeyd edək. Ordinat oxu üzərində $2i$ kompleks ədədinə uyğun nöqtəni almaq üçün x=2 nöqtəsini saat əqrəbinin əksi istiqamətində, yəni müsbət istiqamətdə koordinat başlanğıcı ətrafında 90 dərəcə bucaq qədər döndəririk. Bu dönməyə başlanğıcı O koordinat başlanğıcında, son nöqtəsi isə x=2 nöqtəsində olan OA vektorunun 90^0 dönməsi kimi də baxa bilərik. Deməli, bu zaman 2 həqiqi ədədinin i xəyali hissəyə hasili 2 ədədinin dönməsinə izomorf olur:

$$2i \sim R_{90}(2)$$

$2i$ kompleks ədədinin yenə də 90^0 bucaq altında müsbət istiqamətdə döndərsək, absis oxunun üzərində koordinatı həqiqi ədəd olan x=-2 ədədinə uyğun olan nöqtəni alarıq. Bu isə onu göstərir ki, 180 dərəcəli dönmədə $2i \cdot i$ ədədinə uyğun olan nöqtə belə tapılır:

$$2i \cdot i = 2i^2 = 2(-1) = -2$$

Bu bərabərlik isə əyani şəkildə $i^2=-1$ olduğunu göstərir.

Eyni məntiqlə davam etsək, 180, 270 və 360 dərəcəli dönmə üçün də kompleks ədədin qüvvətlərini tapa bilərik.

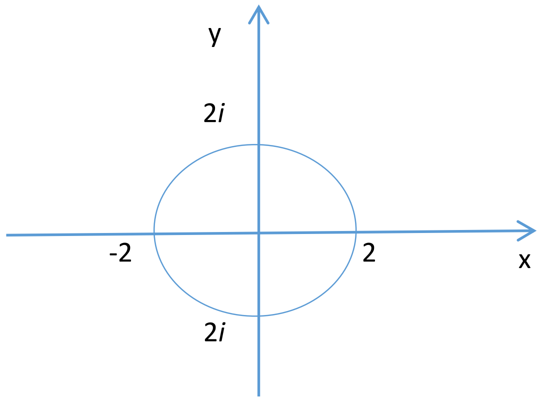
R_{270} dönməsində absis oxu üzərindəki (-2) həqiqi ədədi i kompleks ədədinə vurulur. Onda $-2 \cdot i$ kompleks ədədini alarıq. R_{360} dönməsinə uyğun olan ədəd isə:

$-2i \cdot i = -2i^2 = -2(-1) = 2$ ədədi alınır. Beləliklə,

R_{180}: $i^2=-1$

R_{270}: $i^3=-i$

R_{360}: $i^4=1$ olduğu əyani şəkildə aydın olur (şəkil 2).



(Şəkil 2.)

Kompleks ədədlərin bu xassəsindən praktikada çox istifadə edilir. Belə ki, mühəndislər kompleks ədədlərdən elektrotexnikada, mexanikada, harmonik rəqslərin tətbiqində tez-tez istifadə edirlər. Onlar kompleks ədədin 90^0 bucaq ətrafında dönmədən yaranması xassəsindən dəyişən cərəyanla iş zamanı, təzyiqi ölçərkən, maqnit sahələri ilə işdə, aviasiya və kosmik sənayedə tətbiq edirlər [2, s.63-65].

Son zamanlarda simvolik riyaziyyat termini elmi ədəbiyyatlarda tez-tez işlənir. Bu termin kompüter riyaziyyatı, kompüter cəbri terminləri ilə sinonim olub, riyazi modelləşdirmənin bir növüdür. Göründüyü kimi, artıq kompüter riyaziyyatı və kompüter cəbri terminləri eyni götürülür, çünki cəbr elmi bütöv riyaziyyatı əhatə edir. Cəbrin elmlər arasında rolu və əhəmiyyəti bu baxımdan da aydın olur. Kompüter cəbrində üç əsas bölmə ayırd edilir:

CAD – Computer Aided Design;

CAM - Computer Aided Manufacturing;

CAE – Computer Aided Engeneering.

Hazırda, konstukturlaşdrma, şəhərsalma, binaların proyektlərinin hazırlanması və s. kimi böyük miqyaslı işləri bu sistemlər olmadan yerinə yetirmək mümkün deyil. Riyazi paketlər isə bu sistemlərin vacib komponenti olub, təkcə mühəndislik və ya texniki sahələrdə deyil, həmçinin humanitar sahələrdə də müəyyən hipotezlərin yoxlanılmasında, məntiqi əməliyyatların yerinə yetirilməsində müvəffəqiyyətlə tətbiq edilir. 90-cı illərin ortalarından etibarən CAD/CAM/CAE sistemlərindən istifadə kütləvi xarakter alıb. Məhz həmin illərdən bu sistemlər istifadəçilər üçün əlyetərli oldu. Bu sistemlər alqoritmik dillərdə mürəkkəb proqramların yazılmasını və proqramı yazmaq üçün dilin əlifbasını, qayda-qanununu bilməyi tələb etmir, bu artıq keçmişdə qalıb. İndi müasir sistemlərdə məsələnin daxil edilməsi kifayət edir, proqram isə onu addım-addım həll edir və istifadəçiyə lazım olan cavabı simvolik dildə verir. Beləliklə, bu sistemlərdə kompüter sərbəst şəkildə məsələni simvolik formada həll edir, istifadəçinin əməyi isə minimuma endirilir. Paketlərin üstünlükləri çoxdur: bu paketlərdən təkcə adi kalkulyator kimi deyil, məsələlərin həlli zamanı aralıq nəticələrin alınması, qrafik təsvirlərin, hətta səsli informasiyanın emalı vasitəsi kimi də istifadə etmək olar. Həmçinin bu paketlərin internetlə əlaqələndirilməsi və məsələ həlli prosesində HTML səhifələrinin generasiyası da mümkündür.

Kompleks ədədlərin tətbiq sahələrinin geniş olması və onların hazırda kompüterdə müxtəlif proqramlarda verilməsi gələcək müəllimlərin hazırlığında da mütləq şəkildə istifadə edilməsinə imkan yaradır. Bu proqramlardan biri olan MS Excel-də kompleks ədədlərlə bağlı aşağıdakı funksiyalar yerləşir:

COMPLEX(a, b) – həqiqi hissəsi a, xəyali hissəsi b olan kompleks ədədi cəbri formada göstərir;

İNSUM(A3, B3) – A3 və B3 xanalarındakı kompleks ədədləri toplayır;

İMABS(A4) – A4 xanasındakı kompleks ədədin modulunu hesablayır;

İMDİV(number1, number2) - iki kompleks ədədin qismətini tapır;

İMPOWER(A3, 2) – A3 xanasındakı kompleks ədədin 2-ci dərəcədən qüvvətini tapır;

İMREAL(A4) – A4 xanasındakı kompleks ədədin həqiqi hissəsini tapır;

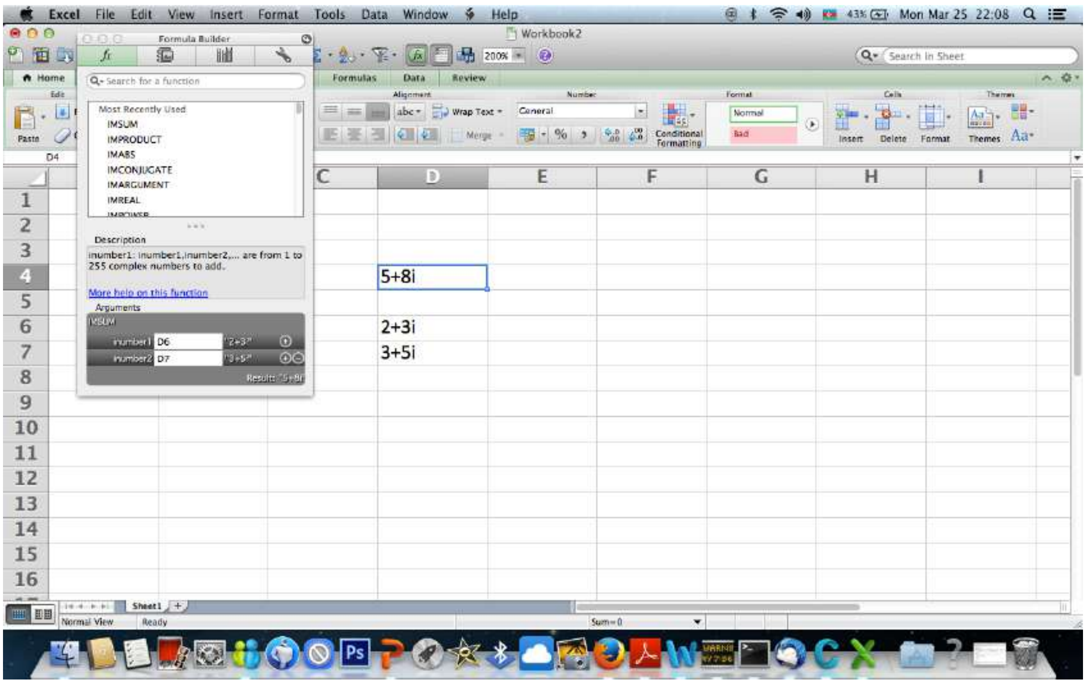
İMCONJUGATE(A4) – A4 xanasındakı kompleks ədədin qoşmasını tapır;

İMPRODUCT(number1, number2, …) - 1-dən 255-ə qədər sayda kompleks ədədlərin hasilini tapır;

İMARGUMENT – verilmiş kompleks ədədin arqumentini tapır və radianlarla ifadə edir.

Bu funksiyalarıdan bir neçəsinin işini Excel proqramında göstərək:

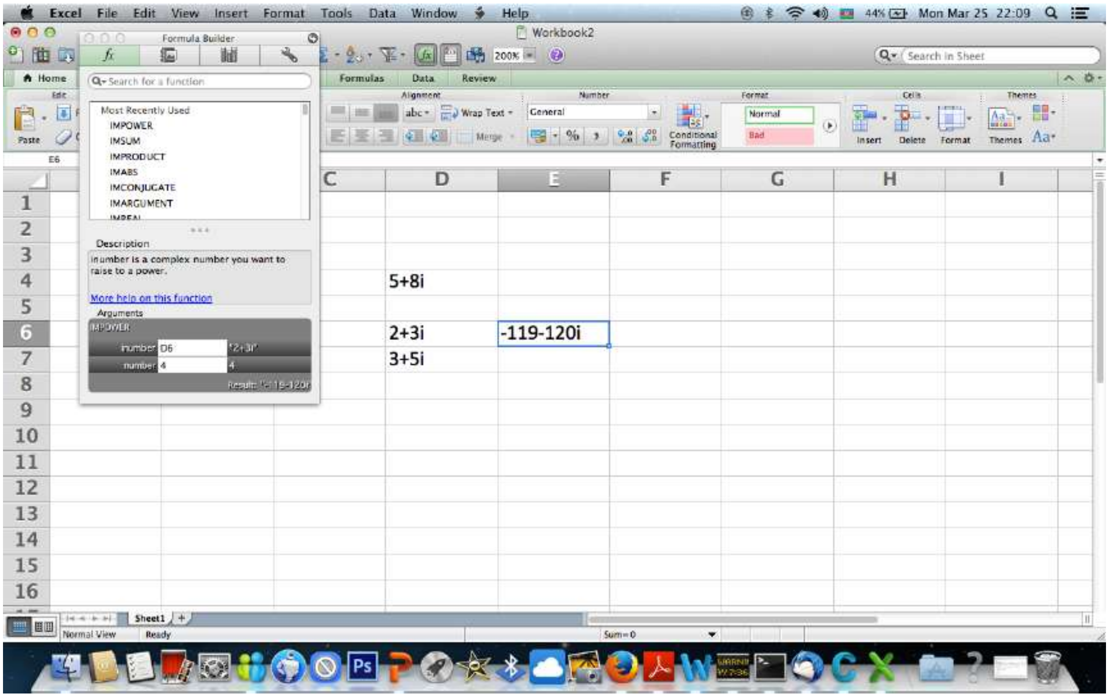
SUM funksiyasının yerinə yetirilməsi nəticəsində D6 və D7 xanalarındakı kompleks ədədlərin cəmi D4 xanasında əks olunub (şəkil 3).



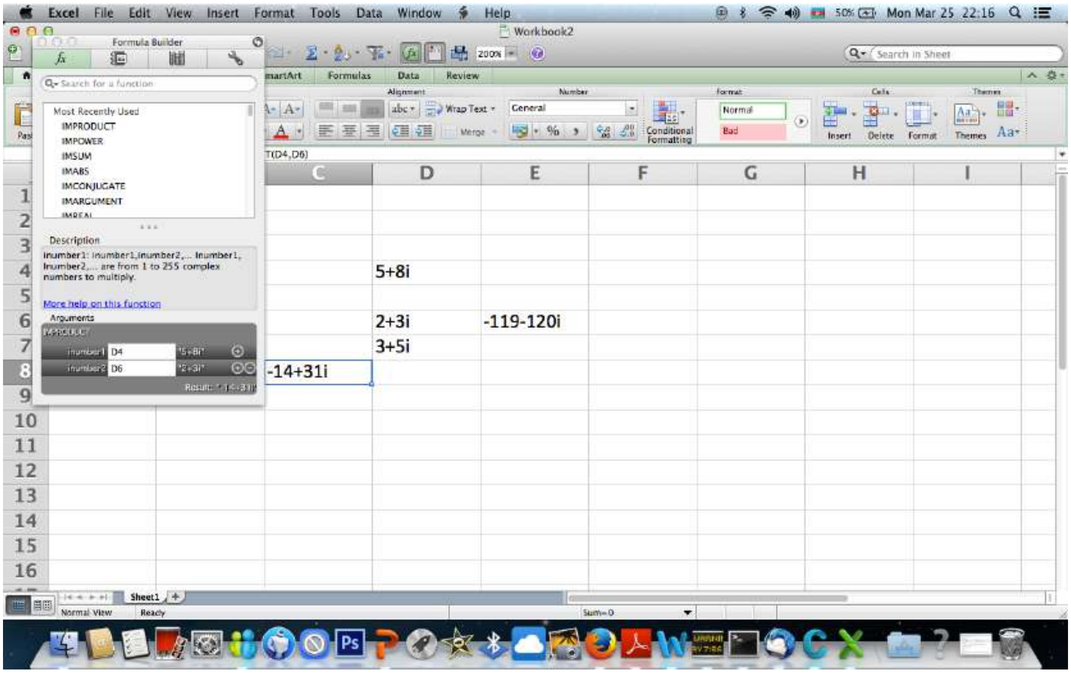
(Şəkil 3.)

İMPOWER (D6, 4) funksiyası D6 xanasında yazılmış kompleks ədədin 4-cü dərəcədən qüvvətini hesablayıb E6 xanasında göstərir

(Şəkil 4).

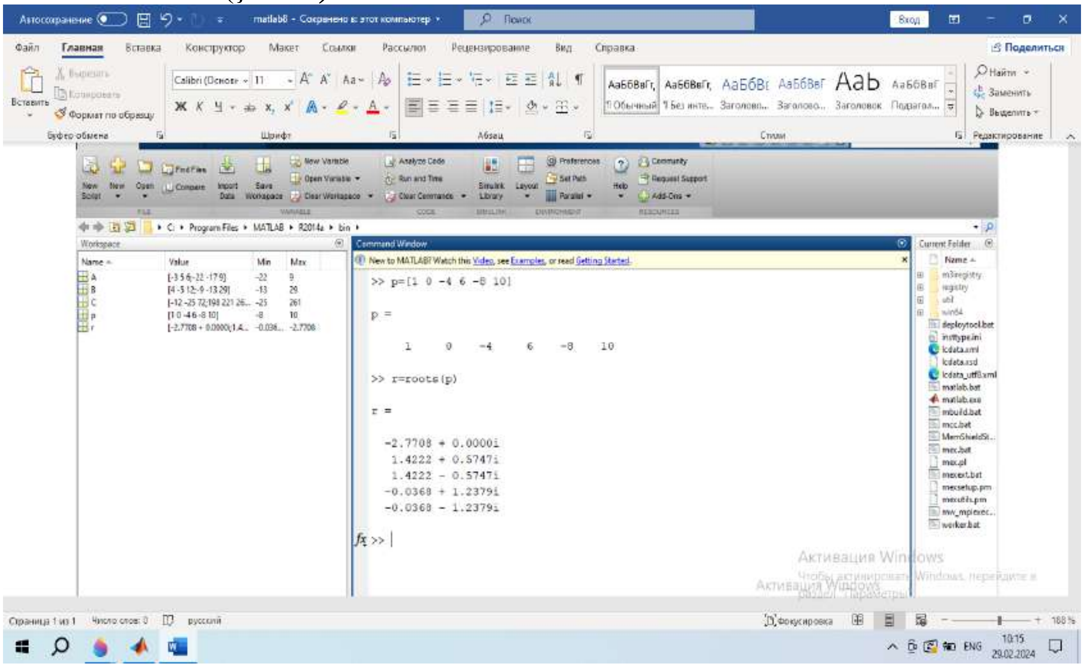


İMPRODUCT funksiyası D4 və D6 xanalarındakı kompleks ədədlərin C8 xanasında hasilini hesablayıb (şəkil 5).



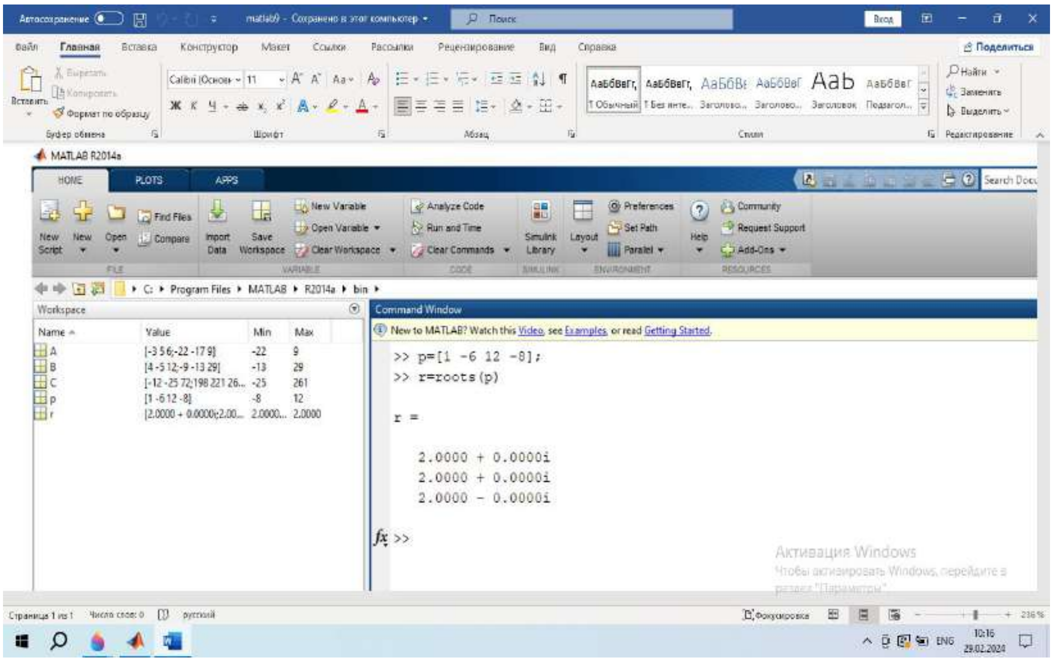
Cəbrin əsas teoreminə görə, hər bir n dərəcəli rasional əmsallı çoxhədlinin kompleks ədədlər meydanında təkrarlanma dərəcəsi nəzərə alınmaqla n sayda kökü var. Kompleks köklərin tapılması üçün riyazi kompüter paketlərindən istifadə edilməsi səmərəlidir. Belə proqramlar olaraq MatLab, Mathematica, Maple və s. misal göstərmək olar. MatLab proqramında çoxhədlinin köklərinin tapılması məsələsini həll edək. Tutaq ki, aşağıdakı çoxhədli verilib: $p=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$.

Çoxhədlinin daxil etmək üçün Command Window pəncərəsində p=[1 0 -4 6 -8 10] və r=roots(p) əmrlərini daxil edirik. Əmrin icrası nəticəsində eyni zamanda həm Command Window, həm də Workspace pəncərəsində çoxhədlinin 5 kökü əks olunur. Şəkil 4.2.8-dən görünür ki, köklərdən biri həqiqi, digər dördü kompleks ədədlərdir. Tələbələrə aydın olur ki, 5 dərəcəli çoxhədlinin kompleks kökləri varsa, onların sayı cüt ədədlə ifadə olunmalıdır, çünki hər bir kompleks kökün qoşması da həmin çoxhədlinin kökündür (şəkil 6).



(Şəkil 6.)

$p=x^3-6x^2+12x-8$ çoxhədlisinin kökləri isə həqiqi ədədlərdir. Bunu MatLab proqramının köməyilə aşağıdakı kimi tapa bilərik (Şəkil 7).



(Şəkil 7.)

Tələbələrin diqqətini proqramda köklərin yazılış qaydasına yönəltmək lazımdır: çoxhədlinin 3 dəfə təkrarlanan 2-yə bərabər olan həqiqi kökü 1-ci və 2-ci sətirlərdə eyni, 3-cü sətirdə isə xəyali hissə minus işarəsi ilə yazılıb. Proqram çoxhədlinin köklərini ümumi halda kompleks ədədlər şəklində göstərdiyi üçün, onlardan birini 2.0000+0.0000i, digərini isə 2.0000-0.0000i şəklində təqdim edir.

X sinif riyaziyyat kursunda şagirdlər kompleks ədəd anlayışı ilə tanış olurlar [3, s.221-227]. Bu mövzunun məzmun standartları aşağıdakılardır:

1.1.1. Kompleks ədəd anlayışı ilə tanışdır.
1.1.2. Kompleks ədədi cəbri və triqonometrik şəkildə göstərir.
1.2.1. Cəbri şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində hesab əməllərini yerinə yetirir.
1.2.2. Kompleks ədədin istənilən dərəcədən qüvvətini və kökünü tapır.

Dərsliyin 224-cü səhifəsində belə bir sual qoyulur: - Kompleks ədədlər real həyatda harada istifadə edilir? Cavabda bildirilir ki, fiziki, kimyəvi hadisələrin, mühəndis texniki qurğuların layihələri rasional tənliklərlə modelləşdirilir. Bu işlərin yerinə yetirilməsində kompüter texnikasından istifadə edilir – rasional tənliklər kompüterdə həll edilir. Bu izahdan məntiqi nəticə olaraq alınır ki, kompleks ədədlərin öyrənilməsi bilavasitə kompüter texnikasından istifadə etmələ yerinə yetirilə bilər. Mövzunun davamı olaraq XI sinif dərsliyində [4, s.17] çoxhədlinin çoxhədliyə bölünməsi mövzusundan sonra da kompleks ədəd mövzusu verilmişdir. Mövzunun sonunda tətbiq tapşırıqları hissəsində kompleks ədədlər üzərində əməllər, vahidin köklərinin hesablanması, tənliklərin həlli, çoxhədli funksiya və onun qrafikinə əsasən çoxhədlinin köklərinin tapılmasına aid tapşırıqlar təqdim edilir.

Göründüyü kimi, tələbələr kompleks ədəd anlayışı ilə X və XI sinif riyaziyyat kursundan tanış olur və kifayət qədər tapşırıqlar həll edirlər. Həmin mövzunun təkrarən cəbr kursunda öyrənilməsini yalnız İKT vasitəsilə yuxarıda göstərilən formada tətbiq tapşırıqları ilə məhdudlaşdırmaq olar.

Kompleks ədədlər və onlar üzərində əməllər son illərdə orta məktəb proqramına daxil edilmiş və X və XI siniflərdə həm nəzəri, həm də tapşırıqlar həlli ilə öyrədilir. Bu mövzunun ali məktəb cəbr proqramından çıxarılması və çoxhədlilər cəbrində kompüter proqramları ilə işdə öyrədilməsi məqsədəuyğun olardı.

Tələbələr müasir cəbrin problemlərini başa düşməkdə, xüsusilə də öyrəndiklərini tətbiq edə bilməkdə çətinlik çəkirlər. Bu problemin həlli üçün cəbr kursu üzrə keçirilən mühazirə və məşğələlər üçün yeni proqramların, dərs vəsaitlərinin hazırlanması, o cümlədən İKT ilə işə əsaslanan köməkçi vəsaitlərin – kompakt disklərin, elektron dərs vəsaitlərinin əlavə edilməsi yaxşı olardı.

ƏDƏBİYYAT

1. Горюшкин А.П. Абстрактная и компьютерная алгебра. М.: 2023, Юрайт 691 с.9
2. Строгац С. Удовольствие {от} х. Перевод с анг. / С.Строгац. Москва: 2014. Манн, Иванов и Фербер, 304 с.
3. Qəhrəmanova N.M. Ümumtəhsil məktəblərinin 10-cu sinfi üçün Riyaziyyat fənni üzrə dərslik / Qəhrəmanova N.M., Kərimov M.A., Hüseynov İ.H. Bakı: 2022. Radius. 320 s.
4. Qəhrəmanova N.M. Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinifləri üçün Riyaziyyat fənni üzrə dərslik / Qəhrəmanova N.M., Kərimov M.A., Quliyev Ə.F. Bakı: 2023. Radius, 320 s.
5. Nəbiyev H. Məktəblinin izahlı lüğəti / Nəbiyev H. Bakı: 1983. Maarif, 160 s.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / Курош.А.Г. Москва: 1975. Наука, 431 с.
7. Əkbərov M.S. Ali cəbr / Əkbərov M.S. Bakı: 1976. Maarif, 386 s.

SUMMARY

Khumar Novruzova

A SYSTEM OF TASKS SOLVED IN THE FIELD OF COMPLEX NUMBERS WITH ICT SUPPORT

The article is devoted to the methodology of teaching algebra in higher schools. It is known that among the mathematical subjects taught in higher schools, algebra is one of the most complex subjects. For students to master this subject better, the use of appropriate learning technologies, ICT opportunities helps to overcome the difficulties. In the article, the solution of problems related to complex numbers in MS Excel, Matlab computer programs is presented, and proposals that should be considered in educational programs related to this topic are put forward.

Key words: *algebra, complex number, complex root, polynomial, ICT*