FAMİL MƏMMƏDOV
familm5577@gmail.com
ÜMÜD RZAYEV
umud_rzayev95@mail.ru
Naxçıvan Dövlət Universiteti

ANİZOTROP ELLİPTİK HİSSƏLİ VƏ QEYRİ-XƏTTİ DİSSİPASİYALI HİPERBOLİK TİP TƏNLİYİN ÜÇÖLÇÜLÜ FƏZADA QLOBAL HƏLLİNİN VARLIĞI

Üç ölçülü halda bir sinif qeyri-xətti dissipasiyalı anizotrop elliptik hissəli hiperbolik tənlik üçün qarışıq məsələ tədqiq edilmiş, lokal və qlobal həllərin varlığı araşdırılmışdır. Norma ilə təchiz edilmiş anizotrop Sobolev fəzasında lokal həllin və qlobal həllin varlığı haqda teoremlər isbat edilmişdir.

Tutaq ki Π_3 üçölçülü kubdur:

$$\Pi_3 = \{x : x = (x_1, .x_{2,}, x_3),\ 0 \le x_j \le 1,\ j = 1,2,3\} .$$

$$x_1'(a) = (a, x_2, x_3), x_2'(a) = (x_1, a, x_3), x_3'(a) = (x_1, x_2, a)$$

işarələmələri aparaq və anizotrop elliptik hissəli və qeyri-xətti dissipasiyalı hiperbolik tənlik üçün qarışıq məsələyə baxaq.

$$u_{tt} + \sum_{k=1}^{3} (-1)^{l_k} D_{x_k}^{2l_k} u + |u_t|^{r-1} u_t = |u|^{p-1} u, \quad t > 0,\ x \in \Pi_3 , \qquad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x),\ x \in \Pi_3, \qquad (2)$$

$$D_{x_k}^{\beta_k} u(t, x_k'(0)) = D_{x_k}^{\beta_k} u(t, x_k'(1)) = 0, \quad , \qquad (3)$$
$$\beta_k = 0,1,\ldots,l_k - 1,\ k = 1,2,3$$

burada l_{x_k} natural ədəd, $D_{x_k} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1,2,3$.

$$\vec{l} = (l_1, l_2, l_3), \qquad \left|\vec{l}^{\,-1}\right| = \left|\frac{1}{\vec{l}}\right| = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = \frac{l_2 l_3 + l_1 l_3 + l_1 l_2}{l_1 l_2 l_3}$$

kimi qiymətləndirmələr aparaq.

$W_2^{\vec{l}}(\Pi_3)$ anizotrop Sobolev fəzasında norma

$$\|u\|_{W_2^{\vec{l}}(\Pi_3)} = \left\{ \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{3} \left\| D_{x_j}^{l_i} u \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

şəklindədir.

$W_2^{\vec{l}}(\Pi_3)$ fəzasının alt fəzasını $\hat{W}_2^{\vec{l}}(\Pi_3)$ ilə işarə edək

$$\hat{W}_2^{\vec{l}}(\Pi_3) = \Big\{ u : u \in W_2^{\vec{l}}(\Pi_3), D_{x_k}^{\beta_k} u(t, x_k'(0)) = D_{x_k}^{\beta_k} u(t, x_k'(1)) = 0,$$
$$\beta_k = 0,1,\ldots,l_k - 1,\ k = 1,2,3 \Big\}$$

Əgər $2 \le s < +\infty$

Onda, $\left|\vec{l}^{\,-1}\right| < 2$ və $2 \le s \le \dfrac{2\left|\vec{l}^{\,-1}\right|}{\left|\vec{l}^{\,-1}\right| - 2}$. onda, $\left|\vec{l}^{\,-1}\right| > 2$,

Onda elə B_s ədədi mövcuddur ki, ixtiyari $v(.) \in \widehat{W}_2^{\vec{l}}(\Pi_3)$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur

$$\|v(.)\|_s \le B_s \left[\sum_{k=1}^{3} \left\| D_{x_j}^{l_j} v(.) \right\|^2 \right]^{1/2} \tag{4}$$

Teorem 1. (lokal həllin varlığıı). Tutaq ki,

$$1 \le p < +\infty \ , \qquad \left|\vec{l}^{\,-1}\right| < 2, \tag{5}$$

və ya

$$1 \le p \le \frac{\left|\vec{l}^{\,-1}\right|}{\left|\vec{l}^{\,-1}\right| - 2} \qquad \left|\vec{l}^{\,-1}\right| > 2. \tag{6}$$

Onda ixtiyari $\varphi(.) \in \widehat{W}_2^{\vec{l}}(\Pi_3)$, $\psi(.) \in L_2(\Pi_3)$ üçün elə $T > 0$ ədədi var ki, (1)-(3) məsələsinin $u(.) \in C\left([0,T]; \widehat{W}_2^{\vec{l}}(\Pi_3)\right)$, $u_t(.) \in C([0,T]; L_2(\Pi_3)) \cap L_{r+1}([0,T] \times \Pi_3)$ şəklində həlli var.

Əgər $T' > 0$ maksimal uzunquqlu intervalda $u(.) \in C\left([0,T']; \widehat{W}_2^{\vec{l}}(\Pi_3)\right)$ lokal həll mövcuddur

$u_t(.) \in C([0,T']; L_2(\Pi_3)) \cap L_{r+1}([0,T] \times \Pi_3)$, onda aşağıdakı şərtlər ödənilir.

1) $\lim\limits_{t \to T'-0} \left[\|u_t(t,.)\|^2 + \sum\limits_{k=1}^{3} \left\| D_{x_j}^{l_j} u(t,.) \right\|^2 \right] = +\infty$;

2) $T' = +\infty$.

Teorem 2. Fərz edək ki, $p \le r$. Onda teorem 1-də verilmiş lokal həll qlobal həlldir.

İsbatı. Tutaq ki, $u(t,x)$ $[0,T] \times \Pi_3$ oblastında (1)-(3) məsələsinin həllidir. (1) hər iki tərəfini $u_t(t,x)$ vuraq və $[0,t] \times \Pi_3$ oblastı üzrə inteqrallayaq. Onda alırıq ki,

$$\int_0^t \int_{\Pi_3} u_{tt}(t,x).u_t(t,x)dxdt + \int_0^t \int_{\Pi_3} \sum_{k=1}^{3} (-1)^{l_k} D^{2l_k} u(t,x).u_t(t,x)dxdt +$$

$$+ \int_0^t \int_{\Pi_3} |u_t(t,x)|^{r+1} dxdt = \int_0^t \int_{\Pi_3} |u(t,x)|^{p-1} u(t,x).u_t(t,x)dxdt \ . \tag{7}$$

Hissə-hissə inteqral üsulunu tətbiq etsək

$$\int_0^t \int_{\Pi_3} u_{tt}(t,x).u_t(t,x)dxdt = \frac{1}{2}\left[\|u_t(t,,)\|^2 - \|\psi(.)\|^2\right];$$

(8)

$$\int_0^t \int_{\Pi_3} \sum_{k=1}^{3}(-1)^{l_k} D^{2l_k} u(t,x).u_t(t,x)dxdt = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{3}\left\|D_{x_j}^{l_j} u(t,.)\right\|^2 - \sum_{k=1}^{3}\left\|D_{x_j}^{l_j}\varphi(.)\right\|^2\right]$$

(9)

alırıq.

(7) bərabərlikləri nəzərə alsaq,

$$I = \frac{1}{2}\left[\|u_t(t,,)\|^2 + \sum_{k=1}^{3}\left\|D_{x_j}^{l_j} u(t,.)\right\|^2\right] + \frac{1}{p+1}\int_{\Pi_3} |u(t,x)|^{p+1} dx +$$

$$+\int_0^t \int_{\Pi_3} |u_t(t,x)|^{r+1} dxdt = \frac{1}{2}\left[\|\psi(.)\|^2 + \sum_{k=1}^{3}\left\|D_{x_j}^{l_j}\varphi(.)\right\|^2\right] +$$

$$+\frac{1}{p+1}\int_{\Pi_3} |\varphi(x)|^{p+1} dx + 2\int_0^t \int_{\Pi_3} |u(t,x)|^{p-1} u(t,x).u_t(t,x)dxdt.$$

alırıq.

Hölder bərabərsizliyindən $q = \frac{r+1}{r}$, $q' = r+1$ qiymətindən

$$J = \left|\int_0^t \int_{\Pi_3} |u(t,x)|^{p-1} u(t,x).u_t(t,x)dxdt\right| \le$$

$$\le \left(\int_0^t \int_{\Pi_3} |u(t,x)|^{\frac{p(r+1)}{r}} dxdt\right)^{r/r+1} \left(\int_0^t \int_{\Pi_3} |u_t(t,x)|^{r+1} dxdt\right)^{1/r+1}. \qquad (10)$$

$\eta = \varepsilon^{\frac{1}{r+1}}(r+1)^{\frac{1}{r+1}}$ $\eta' = \frac{\eta}{\eta - 1}$ parametrlərini Yunq bərabərsizliyində nəzərə alsaq

$$\left(\int_0^t\int_{\Pi_3}|u(t,x)|^{\frac{p(r+1)}{r}}dxdt\right)^{r/_{r+1}}\left(\int_0^t\int_{\Pi_3}|u_t(t,x)|^{r+1}dxdt\right)^{1/_{r+1}}\leq$$

$$\leq\frac{r}{(r+1)^{\frac{r+1}{r}}\varepsilon^{\frac{1}{r}}}\int_0^t\int_{\Pi_3}|u(t,x)|^{\frac{p(r+1)}{r}}dxdt+\varepsilon\int_0^t\int_{\Pi_3}|u_t(t,x)|^{r+1}dxdt. \qquad (11)$$

Bərabərsizliyini alırıq. Əgər $r>p$ isə

$$J\leq\frac{T(r-p)}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}(r+1)^{\frac{r+1}{r}}(p+1)}+$$

$$+\frac{p}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}(p+1)(r+1)^{\frac{1}{r}}}\int_0^t\int_{\Pi_3}|u(t,x)|^{p+1}dxdt+\varepsilon\int_0^t\int_{\Pi_3}|u_t(t,x)|^{r+1}dxdt. \qquad (12)$$

$r=p$ halında isə

$$\frac{1}{2}\left[\|u_t(t,,)\|^2+\sum_{k=1}^{3}\left\|D_{x_j}^{l_j}u(t,.)\right\|^2\right]+\frac{1}{p+1}\int_{\Pi_3}|u(t,x)|^{p+1}dx+$$

$$+(1-2\varepsilon)\int_0^t\int_{\Pi_3}|u_t(t,x)|^{r+1}dxdt\leq\frac{1}{2}\left[\|\psi(.)\|^2+\sum_{k=1}^{3}\left\|D_{x_j}^{l_j}\varphi(.)\right\|^2\right]+$$

$$+\frac{2T(r-p)}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}(r+1)^{\frac{1}{r}}(p+1)}+\frac{2p}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}(p+1)(r+1)^{\frac{1}{r}}}\int_0^t\int_{\Pi_3}|u(t,x)|^{p+1}dxdt.$$

Buradan isə aşağıdakı aprior qiymətləndirmə aparaq

$$\frac{1}{2}\left[\|u_t(t,,)\|^2+\sum_{k=1}^{3}\left\|D_{x_j}^{l_j}u(t,.)\right\|^2\right]+\frac{1}{p+1}\int_{\Pi_3}|u(t,x)|^{p+1}dx+$$

$$+(1-2\varepsilon)\int_0^t\int_{\Pi_3}|u_t(t,x)|^{r+1}dxdt\leq C$$

Burada $C=\left\{\frac{1}{2}\left[\|\psi(.)\|^2+\sum_{k=1}^{3}\left\|D_{x_j}^{l_j}\varphi(.)\right\|^2\right]+\frac{2T(r-p)}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}(r+1)^{\frac{1}{r}}(p+1)}\right\}\exp\left[\frac{2Tp}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}(p+1)(r+1)^{\frac{1}{r}}}\right]$

Beləliklə alırıq ki, teorem1-dəki həll $\left[0,T\right]\times \Pi_3$ oblastında qlobal həlldir.

ƏDƏBİYYAT

1. Алиев А.Б., Намазов И.Г. Об одном классе квазилинейных псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с интегральной нелинейностью //Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физ.-матем. Наук
2. M.Ghisi., M.Gobbino. Global existence and asymptotic behavior for mildly degenerate dissiparive hyperbolic equation of kirchhof type // Asymptotic Analysis, 40(2004), p.25-36
3. Aliyev A.B., Suleymanov N.A. A mixed problem for some classes quasilinear Sobolev type equation //Transactions of NAS Azerbaijan, ISSUE Math. And Mech ., XXIV, №1(2004), p.27-37
4. Məmmədov F.V. Anizotrop elliptik hissəli yarımxətti hiperbolik tənlik üçün Koşi məsələsinin lokal zəif həllinin varlığı və yeganəliyi. NDU-nin elmi əsərləri. Fizika, riyaziyyat və texnika elmləri seriyası. Naxçıvan: 2021. NDU, "Qeyrət" nəşriyyatı. №4(113), s.49-53
5. Məmmədov F.V. Отсутствие глобалных решений для некоторых классов эволюционных уравнений второго порядка. NDU-nin elmi əsərləri. Fizika, riyaziyyat və texnika elmləri seriyası. Naxçıvan: 2013. NDU, "Qeyrət" nəşriyyatı. №1(51), s.52-56

SUMMARY

Famil Mammadov, Umud Rzayev

THE EXISTENCE OF A GLOBAL SOLUTION IN THREE-DIMENSIONAL SPACE OF A HYPERBOLIC TYPE EQUATION WITH ANISOTROPIC ELLIPTICAL PART AND NON-LINEAR DISSIPATION

In the three-dimensional case, a mixed problem for a class of hyperbolic equation with anisotropic elliptic part with nonlinear dissipation was studied, and the existence of local and global solutions was investigated. Theorems about the existence of a local solution and a global solution in an anisotropic Sobolev space equipped with a norm have been proved.

РЕЗЮМЕ

Фамил Мамедов, Умуд Рзаев

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С АНИЗОТРОПНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

В трехмерном случае исследована смешанная задача для класса гиперболических уравнений с анизотропной эллиптической частью с нелинейной диссипацией, а также исследовано существование локальных и глобальных решений. Доказаны теоремы о существовании локального решения и глобального решения в анизотропном пространстве Соболева, снабженном нормой.