



## BƏŞ TƏRTİBLİ SADƏ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN QOYULMUŞ BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN REQULYAR HƏLL OLUNMASI

Əbülfəz Məmmədov

<https://orcid.org/0009-0000-2002-3742>

Naxçıvan Dövlət Universiteti, Naxçıvan, Azərbaycan.

Yazışılan müəllif: [ebulfemammedov@ndu.edu.az](mailto:ebulfemammedov@ndu.edu.az), +994 55 4566531

### XÜLASƏ

İşdə  $R_+ = (0, +\infty)$  yarımxunda beşinci tərtib kəsilməz əmsallı bir sadə operator – diferensial tənlik üçün qoyulmuş bir sərhəd məsələsinin requlyar həlli və requlyar həll olunanlığı anlayışları verilmiş və həmin məsələnin requlyar həll olunanlığı haqqda teorem isbat olunmuşdur.

**Açar sözlər:** *normal operator, hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, requlyar həll, requlyar həll olunanlıq, sərhəd məsələsi*

Separabel  $H$  hilbert fəzasında

$$\frac{d^5 u(t)}{dt^5} + \rho(t)A^5 u(t) = f(t), \quad t \in R_+ = (0, +\infty) \quad (1)$$

operator – diferensial tənliyinin

$$u(0) = u''(0) = u'''(0) = 0 \quad (2)$$

sərhəd şərtini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə baxaq, burada  $f(t)$ ,  $u(t)$   $R_+$ -da sanki hər yerdə təyin olunmuş, qiymətləri isə  $H$  fəzasından olan vektor – funksiyalardır, törəmələr ümumiləşmiş funksiyalar mənada başa düşülür [1] və  $A$  operatoru ilə  $\rho(t)$  əmsalı aşağıdakı kimi təyin olunur:

1)  $A$  tamam kəsilməz  $A^{-1}$  tərsinə malik və spektri  $S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon; \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{10} \right\}$  bucaq

sektorunda yerləşən normal operatorudur ;

2)  $\rho(t) = \begin{cases} \alpha^5, & t \in (0, 1) \\ \beta^5, & t \in [1, \infty) \end{cases}$ , burada  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  və  $\alpha \neq \beta$ .

Hilbert fəzasında normal operatorların spektral nəzəriyyəsiəndən məlumdur ki, 1) şərtini ödəyən  $A$  operatorunu  $A=UC$  şəklində göstərmək olar, harada ki,  $U$  unitar,  $C$  isə müsbət müəyyən və özü – özünə qoşma operatorudur.

$\gamma \geq 0$  olmaqla  $H_\gamma$  ilə  $A$  operatorunun doğurduğu hilbert fəzalarının şkalasını işarə edək, yəni  $H_\gamma = D(A^\gamma)$  və  $H_\gamma$ -da skalyar hasil  $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$  kimi təyin olunub. Hesab edəcəyik ki,  $H_0 = H$  və  $(x, y)_0 = (x, y)_H$ .

Aşağıdakı kimi təyin olunan və  $L_2(R_+; H)$ ,  $W_2^5(R_+; H)$ ,  $W_2^5(R_+; H; 0; 1; 2)$  ilə işarə olunan hilbert fəzalarına baxaq [1] :

$$L_2(R_+; H) = \left\{ f : \|f\|_{L_2(R_+; H)} = \left( \int_0^\infty \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} < +\infty \right\};$$

$$W_2^5(R_+; H) = \left\{ u : \frac{d^5 u}{dt^5}, A^5 u \in L_2(R_+; H), \|u\|_{W_2^5(R_+; H)} = \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \|A^5 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right\};$$

$$W_2^5(R_+; H; 0; 2; 3) = \left\{ u : u \in W_2^5(R_+; H), u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 \right\}$$

Məlumdur [1] ki,  $W_2^5(R_+; H; 0; 2; 3)$  hilbert fəzası  $W_2^5(R_+; H)$  fəzasının tam alt fəzasıdır.

**Tərif 1.** Əgər  $u \in W_2^5(R_+; H)$  vektor – funksiyası (1) tənliyini  $R_+$  - da sanki hər yerdə və (2) sərhəd şərtlərini isə

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t)\|_{9/2} = \lim_{t \rightarrow +0} \|u(t)\|_{5/2} = \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t)\|_{3/2} = 0$$

mənada ödəyirsə, onda ona (1) – (2) sərhəd məsələsinin requlyar həlli deyilir.

**Tərif 2.** Əgər istənilən  $f \in L_2(R_+; H)$  üçün (1) – (2) sərhəd məsələsinin

$$\|u\|_{W_2^5(R_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+; H)}$$

bərabərsizliyini ödəyən requlyar həlli varsa, onda ona requlyar həll olunan sərhəd məsələsi deyilir.

**Teorem :** Əgər  $A$  operatoru 1) şərtini və  $\rho(t)$  ədədi funksiyası isə 2) şərtini ödəyirsə, onda (1) – (2) sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.

**İsbati :** Funksiyanın Furye çevirməsini tətbiq etsək alarıq ki, istənilən  $f \in L_2(R_+; H)$  üçün

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \left( \int_0^{\infty} f(s) e^{i(t-s)\xi} ds \right) d\xi,$$

və

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi^5 E + \beta A^5)^{-1} \left( \int_0^{\infty} f(s) e^{i(t-s)\xi} ds \right) d\xi$$

funksiyaları  $R_+$  - da sanki hər yerdə uyğun olaraq

$$\frac{d^5 u}{dt^5} + \alpha^5 A^5 u = f(t)$$

və

$$\frac{d^5 u}{dt^5} + \beta^5 A^5 u = f(t)$$

operator-diferensial tənliklərini ödəyirlər. Göstərək ki,  $u_1(t), u_2(t) \in W_2^5(R_+; H)$ .

Aşkardır ki,  $u_1(t), u_2(t)$  vektor – funksiyalarının Furiye çevirmələri uyğun olaraq

$$u_1^\wedge(\xi) = (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} f^\wedge(\xi)$$

və

$$u_2^\wedge(\xi) = (i\xi^5 E + \beta^5 A^5)^{-1} f^\wedge(\xi)$$

şəklindədir, harada ki,  $f^\wedge(\xi)$   $f(t)$  vektor – funksiyasının Furiye çevirməsidir.

Plənşerel teoreminə görə alarıq ki,

$$\|u_1\|_{W_2^5(R_+; H)}^2 = \left\| \frac{d^5 u_1}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \|A^5 u_1\|_{L_2(R_+; H)}^2 = \|\xi^5 u_1^\wedge(\xi)\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \|A^5 u_1^\wedge(\xi)\|_{L_2(R_+; H)}^2.$$

$\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$  üstlü yazılışını nəzərə alsaq,  $A$  operatorunun spektral ayrılışından alınır ki, istənilən

$\xi \in R_+$  üçün

$$\begin{aligned}
\|A^5(i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1}\| &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \lambda^5)^{-1}| \leq \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} |\mu^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 e^{5i\varphi})^{-1}| = \\
&= \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} |\mu^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi))^{-1}| = \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} |\mu^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi) + \alpha^5 \mu^5 \cos 5\varphi|^{-1} = \\
&= \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \mu^5 \left[ \alpha^{10} \mu^{10} \cos^2 5\varphi + (\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi)^2 \right]^{-1/2} \leq \\
&\leq \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \mu^5 \left( \xi^{10} - 2\xi^5 \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi + \alpha^{10} \mu^{10} \sin^2 5\varphi + \alpha^{10} \mu^{10} \cos^2 5\varphi \right)^{-1/2} \leq \\
&\leq \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \mu^5 \left( \xi^{10} - \xi^{10} - \alpha^{10} \mu^{10} \sin^2 5\varphi + \alpha^{10} \mu^{10} \right)^{-1/2} = \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \mu^5 \left( \alpha^{10} \mu^{10} - \alpha^{10} \mu^{10} \sin^2 5\varphi \right)^{-1/2} \leq \frac{1}{\alpha^5 \cos 5\varepsilon}
\end{aligned}$$

alarıq. Bu sonuncu bərabərsizliyi nəzərə alsaq

$$\begin{aligned}
\|A^5 u_1^\wedge(\xi)\|_{L_2(R_+; H)} &= \|A^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} f^\wedge(\xi)\|_{L_2(R_+; H)} \leq \\
&\leq \|A^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1}\| \cdot \|f^\wedge(\xi)\|_{L_2(R_+; H)} \leq \frac{1}{\alpha^5 \cos 5\varepsilon} \|f(t)\|_{L_2(R_+; H)}
\end{aligned}$$

olar ki, bu da  $A^5 u_1^\wedge(\xi) \in L_2(R_+; H)$  olduğunu göstərir.

İndi göstərək ki,  $\xi^5 u_1^\wedge(\xi) \in L_2(R_+; H)$ .

$$\begin{aligned}
\|\xi^5 u_1^\wedge(\xi)\|_{L_2(R_+; H)} &= \|\xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} f^\wedge(\xi)\|_{L_2(R_+; H)} \leq \\
\sup_{\xi} \|\xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1}\| \cdot \|f^\wedge(\xi)\|_{L_2(R_+; H)} &= \sup_{\xi} \|\xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1}\| \cdot \|f(t)\|_{L_2(R_+; H)}
\end{aligned} \tag{3}$$

olduğundan  $\|\xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1}\|$  normasını qiymətləndirək.  $A$  operatorunun spektral ayrılışından istənilən  $\xi \in R_+$  üçün alarıq:

$$\begin{aligned}
& \left\| \xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \right\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \xi^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \lambda^5)^{-1} \right| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \xi^5 (i\xi^5 + \alpha^5 |\lambda|^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi))^{-1} \right| \leq \\
& \leq \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \left| \xi^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi))^{-1} \right| = \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \xi^5 \left| \alpha^5 \mu^5 \cos 5\varphi + i(\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi) \right|^{-1} \leq \\
& \leq \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \xi^5 \left( \alpha^{10} \mu^{10} \cos^2 5\varphi + \xi^{10} - 2\xi^5 \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi + \alpha^{10} \mu^{10} \sin^2 5\varphi \right)^{-1/2} = \\
& = \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \xi^5 \left( \xi^{10} + \alpha^{10} \mu^{10} - 2\xi^5 \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi \right)^{-1/2} \leq \sup_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \xi^5 \left( \xi^{10} + \alpha^{10} \mu^{10} \right)^{-1/2} \cdot (1 - \sin 5\varphi)^{-1/2} \leq (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Bu sonuncunu (3)-də nəzərə alsaq

$$\left\| \xi^5 u_1^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R_+; H)} \leq \frac{1}{(1 - \sin 5\varepsilon)^{1/2}} \cdot \|f(t)\|_{L_2(R_+; H)}$$

olar ki, bu da  $\xi^5 u_1^\wedge(\xi) \in L_2(R_+; H)$  olduğunu göstərir.

Bütün bunları nəzərə aldıqda  $u_1(t) \in W_2^5(R_+; H)$  alırıq.

Anoloji qayda ilə isbat olunur ki,  $u_2(t) \in W_2^5(R_+; H)$ .

$u_1(t)$  vektor – funksiyasının  $(0,1]$  yarımintervalına sıxılmasını  $\psi_1(t)$  ilə,  $u_2(t)$  vektor – funksiyasının isə  $[1, \infty)$  yarımintervalına sıxılmasını  $\psi_2(t)$  ilə işarə etsək, aşkardır ki,  $\psi_1(t) \in W_2^5((0,1]; H)$ ,  $\psi_2(t) \in W_2^5([1, \infty); H)$  olar. İzlər haqda teoremə görə [1]

$$\psi_1^{(i)}(0) \in H_{5-i-\frac{1}{2}} = H_{9/2-i}, \psi_i^{(j)}(1) \in H_{9/2-j}, \quad i = 1, 2; \quad j = \overline{0, 4}.$$

$$U(t) = \begin{cases} \theta_1(t) = \psi_1(t) + e^{\alpha\lambda_1(t-1)A} \varphi_1 + e^{\alpha\lambda_2 t A} \varphi_2 + e^{\alpha\lambda_3 t A} \varphi_3 + e^{\alpha\lambda_4 t A} \varphi_4 + e^{\alpha\lambda_5(t-1)A} \varphi_5, & t \in (0,1) \\ \theta_2(t) = \psi_2(t) + e^{\beta\lambda_1(1-t)A} \varphi_6 + e^{\beta\lambda_3(t-1)A} \varphi_7 + e^{\beta\lambda_5(1-t)A} \varphi_8, & t \in [1, \infty) \end{cases}$$

vektor – funksiyasını quraq, burada

$$\lambda_k = \cos \frac{2(k+1)\pi}{5} + i \sin \frac{2(k+1)\pi}{5}, \quad k = \overline{1, 5}, \quad \text{ədədləri } \lambda^5 = -1 \text{ tənliyinin kökləridir, } \varphi_k - \text{lar isə}$$

$(k = \overline{1, 8})$   $H_{9/2}$  hilbert fəzasından olan və hələlik məlum olmayan vektorlardır ki, onları

$u(t) \in W_2^5(R_+; H; 0; 2; 3)$  şərtindən təyin edəcəyik. Bunun üçün  $\theta_1^{(i)}(0) = 0 (i = 0, 2, 3)$  və

$\theta_1^{(j)}(1) = \theta_2^{(j)}(1)$  ( $j = \overline{0,4}$ ) şərtlərindən istifadə edəcəyik. Bu şərtlərdən  $\varphi_k$  ( $k = \overline{1,8}$ ) vektorlarına nəzərən aşağıdakı tənliklər sistemini almış olarıq:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-\alpha\lambda_1 A} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + e^{-\alpha\lambda_5 A} \varphi_5 = -\psi_1(0) \\ \alpha^2 \lambda_1^2 e^{-\alpha\lambda_1 A} \varphi_1 + \alpha^2 \lambda_2^2 \varphi_2 + \alpha^2 \lambda_3^2 \varphi_3 + \alpha^2 \lambda_4^2 \varphi_4 + \alpha^2 \lambda_5^2 e^{-\alpha\lambda_5 A} \varphi_5 = -A^{-2} \psi_1''(0) \\ \alpha^3 \lambda_1^3 e^{-\alpha\lambda_1 A} \varphi_1 + \alpha^3 \lambda_2^3 \varphi_2 + \alpha^3 \lambda_3^3 \varphi_3 + \alpha^3 \lambda_4^3 \varphi_4 + \alpha^3 \lambda_5^3 e^{-\alpha\lambda_5 A} \varphi_5 = -A^{-3} \psi_1'''(0) \\ \varphi_1 + e^{\alpha\lambda_2 A} \varphi_2 + e^{\alpha\lambda_3 A} \varphi_3 + e^{\alpha\lambda_4 A} \varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_6 - \varphi_7 - \varphi_8 = \psi_2(1) - \psi_1(1) \\ \alpha\lambda_1 \varphi_1 + \alpha\lambda_2 e^{\alpha\lambda_2 A} \varphi_2 + \alpha\lambda_3 e^{\alpha\lambda_3 A} \varphi_3 + \alpha\lambda_4 e^{\alpha\lambda_4 A} \varphi_4 + \alpha\lambda_5 \varphi_5 + \beta\lambda_1 \varphi_6 - \beta\lambda_3 \varphi_7 + \beta\lambda_5 \varphi_8 = \\ = A^{-2} (\psi_2'(1) - \psi_1'(1)) \\ \alpha^2 \lambda_1^2 \varphi_1 + \alpha^2 \lambda_2^2 e^{\alpha\lambda_2 A} \varphi_2 + \alpha^2 \lambda_3^2 e^{\alpha\lambda_3 A} \varphi_3 + \alpha^2 \lambda_4^2 e^{\alpha\lambda_4 A} \varphi_4 + \alpha^2 \lambda_5^2 \varphi_5 - \beta^2 \lambda_1^2 \varphi_6 - \beta^2 \lambda_3^2 \varphi_7 - \beta^2 \lambda_5^2 \varphi_8 = \\ = A^{-2} (\psi_2''(1) - \psi_1''(1)) \\ \alpha^3 \lambda_1^3 \varphi_1 + \alpha^3 \lambda_2^3 e^{\alpha\lambda_2 A} \varphi_2 + \alpha^3 \lambda_3^3 e^{\alpha\lambda_3 A} \varphi_3 + \alpha^3 \lambda_4^3 e^{\alpha\lambda_4 A} \varphi_4 + \alpha^3 \lambda_5^3 \varphi_5 + \beta^3 \lambda_1^3 \varphi_6 - \beta^3 \lambda_3^3 \varphi_7 + \beta^3 \lambda_5^3 \varphi_8 = \\ = A^{-3} (\psi_2'''(1) - \psi_1'''(1)) \\ \alpha^4 \lambda_1^4 \varphi_1 + \alpha^4 \lambda_2^4 e^{\alpha\lambda_2 A} \varphi_2 + \alpha^4 \lambda_3^4 e^{\alpha\lambda_3 A} \varphi_3 + \alpha^4 \lambda_4^4 e^{\alpha\lambda_4 A} \varphi_4 + \alpha^4 \lambda_5^4 \varphi_5 - \beta^4 \lambda_1^4 \varphi_6 - \beta^4 \lambda_3^4 \varphi_7 - \beta^4 \lambda_5^4 \varphi_8 = \\ = A^{-4} (\psi_2^{iv}(1) - \psi_1^{iv}(1)) \end{array} \right. \quad \text{Bu}$$

tənliklər sistemini  $A$  operatorundan asılı

$$\Delta_0(A) \tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$$

kimi matris tənliyi şəklində yazsaq, burada  $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8)$ ,  $\tilde{\psi} = (-\psi_1(0), -A^{-1} \psi_1'(0), -A^{-2} \psi_1''(0), \psi_2(1) - \psi_1(1), A^{-1} (\psi_2'(1) - \psi_1'(1)), A^{-2} (\psi_2''(1) - \psi_1''(1)), A^{-3} (\psi_2'''(1) - \psi_1'''(1)), A^{-4} (\psi_2^{iv}(1) - \psi_1^{iv}(1)))$

səkkiz ölçülü sütun matrislərdirlər,  $\Delta_0(A)$  isə səkkiz ölçülü kvadrat matrisdir və

$$\Delta_0(A) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha\lambda_1 A} & E & E & E & e^{-\alpha\lambda_5 A} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 \lambda_1^2 e^{-\alpha\lambda_1 A} & \alpha^2 \lambda_2^2 E & \alpha^2 \lambda_3^2 E & \alpha^2 \lambda_4^2 E & \alpha^2 \lambda_5^2 e^{-\alpha\lambda_5 A} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^3 \lambda_1^3 e^{-\alpha\lambda_1 A} & \alpha^3 \lambda_2^3 E & \alpha^3 \lambda_3^3 E & \alpha^3 \lambda_4^3 E & \alpha^3 \lambda_5^3 e^{-\alpha\lambda_5 A} & 0 & 0 & 0 \\ E & e^{\alpha\lambda_2 A} & e^{\alpha\lambda_3 A} & e^{\alpha\lambda_4 A} & E & -E & -E & -E \\ \alpha\lambda_1 E & \alpha\lambda_2 e^{\alpha\lambda_2 A} & \alpha\lambda_3 e^{\alpha\lambda_3 A} & \alpha\lambda_4 e^{\alpha\lambda_4 A} & \alpha\lambda_5 E & -\beta\lambda_1 E & -\beta\lambda_3 E & \beta\lambda_5 E \\ \alpha^2 \lambda_1^2 E & \alpha^2 \lambda_2^2 e^{\alpha\lambda_2 A} & \alpha^2 \lambda_3^2 e^{\alpha\lambda_3 A} & \alpha^2 \lambda_4^2 e^{\alpha\lambda_4 A} & \alpha^2 \lambda_5^2 E & -\beta^2 \lambda_1^2 E & -\beta^2 \lambda_3^2 E & -\beta^2 \lambda_5^2 E \\ \alpha^3 \lambda_1^3 E & \alpha^3 \lambda_2^3 e^{\alpha\lambda_2 A} & \alpha^3 \lambda_3^3 e^{\alpha\lambda_3 A} & \alpha^3 \lambda_4^3 e^{\alpha\lambda_4 A} & \alpha^3 \lambda_5^3 E & -\beta^3 \lambda_1^3 E & -\beta^3 \lambda_3^3 E & \beta^3 \lambda_5^3 E \\ \alpha^4 \lambda_1^4 E & \alpha^4 \lambda_2^4 e^{\alpha\lambda_2 A} & \alpha^4 \lambda_3^4 e^{\alpha\lambda_3 A} & \alpha^4 \lambda_4^4 e^{\alpha\lambda_4 A} & \alpha^4 \lambda_5^4 E & -\beta^4 \lambda_1^4 E & -\beta^4 \lambda_3^4 E & -\beta^4 \lambda_5^4 E \end{bmatrix}$$

şəklindədir. Göstərək ki,  $\Delta_0(A)$  operator matrisi  $H^8$ -də tərsləyəndir. Bunun üçün  $\Delta_0(A)$  operator matrisində  $A$  operatorunun yerinə  $\lambda$  kompleks dəyişənini yazıb  $\Delta_0(\lambda)$ -nin istənilən  $\lambda \in S_\varepsilon$  üçün tərsləyən olduğunu göstərməliyik. Aşkardır ki,  $|\lambda| \rightarrow \infty$  olmaqla  $\lambda \in S_\varepsilon$  olsa

$$\det \Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \lambda_2^2 & \alpha^2 \lambda_3^2 & \alpha^2 \lambda_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 \lambda_2^3 & \alpha^3 \lambda_3^3 & \alpha^3 \lambda_4^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ \alpha \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \lambda_5 & \beta \lambda_1 & -\beta \lambda_3 & \beta \lambda_5 \\ \alpha^2 \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \lambda_5^2 & -\beta^2 \lambda_1^2 & -\beta^2 \lambda_3^2 & -\beta^2 \lambda_5^2 \\ \alpha^3 \lambda_1^3 & 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \lambda_5^3 & \beta^3 \lambda_1^3 & -\beta^3 \lambda_3^3 & \beta^3 \lambda_5^3 \\ \alpha^4 \lambda_1^4 & 0 & 0 & 0 & \alpha^4 \lambda_5^4 & -\beta^4 \lambda_1^4 & -\beta^4 \lambda_3^4 & -\beta^4 \lambda_5^4 \end{vmatrix} + o(\lambda)$$

olar, burada  $|\lambda| \rightarrow \infty$  olduqda  $|o(\lambda)| \rightarrow 0$  olur. Vandermond determinantının hesablanması üsulunu tətbiq etsək alırıq ki,  $|\lambda| \rightarrow \infty$  və  $\lambda \in S_\varepsilon$  olduqda  $\det \Delta_0(\lambda) \neq 0$  olur.

İndi göstərək ki, istənilən  $\lambda \in S_\varepsilon$  üçün  $\det \Delta_0(\lambda) \neq 0$ . Doğrudan da, əgər belə deyilsə, onda elə  $\mu \in S_\varepsilon$  ( $\operatorname{Re} \mu > 0$ ) var ki,  $\det \Delta_0(\mu) = 0$ . Bu isə o deməkdir ki, elə sıfırdan fərqli  $\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in C^8$  vektoru var ki,  $\Delta_0(\mu)\xi = 0$  olur, burada  $C$  kompleks ədədlər meydanıdır. Onda aşkardır ki, həmin  $\mu \in S_\varepsilon$  ədədlərinin hər biri üçün

$$\frac{d^5 x(t)}{dt^5} + \rho(t)\mu^5 x(t) = 0 \quad (4)$$

$$x(0) = x''(0) = x'''(0) = 0 \quad (5)$$

sərhəd məsələsinin həlli

$$x(t) = \begin{cases} e^{\alpha \lambda_1 \mu(t-1)} x_1 + e^{\alpha \lambda_2 \mu t} x_2 + e^{\alpha \lambda_3 \mu t} x_3 + e^{\alpha \lambda_4 \mu t} x_4 + e^{\alpha \lambda_5 \mu(t-1)} x_5, & t \in (0, 1], \\ e^{\beta \lambda_1 \mu(1-t)} x_6 + e^{\beta \lambda_3 \mu(t-1)} x_7 + e^{\beta \lambda_5 \mu(1-t)} x_8 & t \in [1, \infty) \end{cases}$$

şəklində axtarılmalıdır. Göstərək ki,  $x(t) \equiv 0$  olur.

Doğrudanda, (4) – dən

$$\begin{aligned}
0 &= \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 x(t)}{dt^5} + \rho^{1/2} \mu^5 x(t) \right\|_{L_2(R_+)}^2 = \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+)}^2 + \\
&+ \left\| \rho^{1/2} \mu^5 x(t) \right\|_{L_2(R_+)}^2 + 2 \operatorname{Re} \bar{\mu}^5 \left( \frac{d^5 x(t)}{dt^5}, x(t) \right)_{L_2(R_+)}
\end{aligned} \tag{6}$$

alırıq ki,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$  şərtini nəzərə alıb hissə - hissə inteqrallamadan sonra

$$\left( \frac{d^5 x(t)}{dt^5}, \mu^5 x(t) \right)_{L_2(R_+)} = -\bar{\mu}^5 \left( x(t), \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right)_{L_2(R_+)}$$

olar. Onda

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \bar{\mu}^5 \left( \frac{d^5 x(t)}{dt^5}, x(t) \right)_{L_2(R_+)} &= 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \left( \frac{d^5 x(t)}{dt^5}, \mu^5 x(t) \right) dt = \bar{\mu}^5 \int_0^\infty \left( \frac{d^5 x(t)}{dt^5}, x(t) \right) dt + \mu^5 \int_0^\infty \left( x(t), \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right) dt = \\
&= \mu^5 \int_0^\infty \left( x(t), \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right) dt - \bar{\mu}^5 \int_0^\infty \left( x(t), \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right) dt = (\mu^5 - \bar{\mu}^5) \int_0^\infty \left( x(t), \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right) dt = \\
&= 2|\mu|^5 i \sin 5\varphi \int_0^\infty \left( \rho^{1/2} x(t), \rho^{-1/2} \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right) dt \geq -2|\mu|^5 \sin 5\varphi \left\| \rho^{1/2} x(t) \right\|_{L_2(R_+)} \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+)}
\end{aligned}$$

alırıq ki, bunu (6)-da nəzərə alsaq

$$\begin{aligned}
0 &\geq \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+)} + |\mu|^{10} \left\| \rho^{1/2} x(t) \right\|_{L_2(R_+)} - \\
&- 2|\mu|^5 \sin 5\varphi \left\| \rho^{1/2} x(t) \right\|_{L_2(R_+)} \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+)} \geq \\
&\geq (1 - \sin 5\varphi) \left( \left\| \rho^{1/2} x(t) \right\|_{L_2(R_+)}^2 + \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 x(t)}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+)}^2 \right)
\end{aligned}$$

olar.  $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{10}$  olduğundan, axırıncı bərabərsizlikdən alırıq ki,  $R_+$  - da sanki hər yerdə  $x(t) = 0$  olur.

Buradan isə  $\xi = 0$ , yəni  $x_1 = x_2 = \dots = x_7 = x_8 = 0$  olduğu alınır.

Beləliklə, biz aldıq ki,  $\Delta_0(\mu)\xi = 0$  matris tənliyi yalnız sıfır həllinə malikdir. Buna görə də  $\Delta_0(\mu)$  matrisi  $\operatorname{Re} \mu \geq \mu_0 > 0$  olan istənilən  $\mu \in S_\varepsilon$  üçün tərsinəndir. Onda aşkardır ki, istənilən

$\lambda \in S_\varepsilon$  üçün  $|\det \Delta_0(\lambda)| \geq \sigma_0 > 0$ .  $\lambda \in \sigma(A) \subset S_\varepsilon$  olduqda  $A$  operatorunun spektral ayrılışından alarıq ki,  $\Delta_0(A)$  operator matrisi  $H^8$  fəzasında tərslənəndir. Onda biz  $H_{9/2}$  hilbert fəzasından olan  $\varphi_i (i = \overline{1,8})$  vektorlarını yuxarıda aldığımız tənliklər sisteminin həlli kimi birqiymətli olaraq tapa bilərik.  $\varphi_j \in H_{9/2} (j = \overline{1,8})$  olduğundan  $u(t) \in W_2^5(R_+; H; 0; 2; 3)$  olar.

$\Delta_0(A)$  operator matrisi tərslənən olduğundan

$$\begin{cases} \frac{d^5 u}{dt^5} + \rho(t)A^5 u = 0 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 \end{cases}$$

sərhəd məsələsi yalnız sıfır həllinə malikdir. Onda ki,  $P_0 \cdot = \frac{d^5 \cdot}{dt^5} + \rho(t)A^5 \cdot$  operatoru  $W_2^5(R_+; H; 0; 2; 3)$  hilbert fəzasını  $L_2(R_+; H)$  hilbert fəzası üzərinə qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirir.

İstənilən  $u \in W_2^5(R_+; H)$  üçün

$$\begin{aligned} \|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 &= \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} + \rho(t)A^5 u \right\|_{L_2(R_+; H)}^2 \leq 2 \left( \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \left\| \rho(t)A^5 u \right\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right) \leq \\ &\leq 2 \left( \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \max \rho^2(t) \|A^5 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right) \leq 2 \left( \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \max(\alpha^{10}, \beta^{10}) \|A^5 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right) \leq \\ &\leq \text{const} \left( \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \|A^5 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right) = \text{const} \|u\|_{W_2^5(R_+; H)}^2 \end{aligned}$$

olduğundan  $P_0 : W_2^5(R_+; H; 0; 2; 3) \rightarrow L_2(R_+; H)$  operatoru məhduddur .

Beləliklə alarıq ki,  $P_0 \cdot = \frac{d^5 \cdot}{dt^5} + \rho(t)A^5 \cdot$  operatoru məhduddur və  $W_2^5(R_+; H; 0; 2; 3)$  hilbert fəzasını  $L_2(R_+; H)$  hilbert fəzası üzərinə biyektiv inikas etdirir. Onda, tərs operator haqda Banax teoreminə görə

$$P_0^{-1} : L_2(R_+; H) \rightarrow W_2^5(R_+; H; 0; 2; 3)$$

tərs operatoru var və o  $L_2(R_+; H)$  üzərində məhduddur, yəni

$$\|u\|_{W_2^5(R_+; H)} = \|P_0^{-1} f\|_{W_2^5(R_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+; H)}$$

olur. Onda, tərifə görə, (1) – (2) sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır. **T.i.o.**

## **ƏDƏBİYYAT SİYAHISI:**

1. Ж.-Л.Лионс, Э.Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Изд. «Мир», Москва, 1971, 361 ст.
2. Мирзоев С.С. Об условиях корректной разрешимости краевых задач для операторно – дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1983, т.273, № 2, с.282-295.
3. Алиев А.Р. О разрешимости краевой задачи для операторно- дифферен- циальных уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом. // Труды ИММ АН Азерб., т.7 (15), 1997, ст. 18- 25.
4. Sabir S. Mirzoev, Abulfaz M.Mamedov. On an initial boundary – value problem for operator – differential equations of third order in Hilbert space. // Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun əsərləri //, XXIX с., Baku – 2008.
5. Mamedov A.M. On regular solvability of a class of operator- differential equations Of fifth order with a continuous coefficient on the aris. Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “ƏSƏRLƏRİ”, XXXVIII с., BAKU-2013, “Elm”

## **РЕЗЮМЕ**

### **РЕГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПОСТАВЛЕННОГО ДЛЯ ПРОСТОГО ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА**

**Абульфаз Мамедов**

В работе дано определение регулярного решения и регулярной разрешимости краевой задачи, поставленного для одного простого операторно-дифференциального уравнения пятого порядка с разрывным коэффициентом в полуоси и доказано теорема о регулярной разрешимости той задачи.

**Ключевые слова:** *нормальный оператор, гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, регулярное решение, регулярная разрешимость, граничная задача*

## ABSTRACT

### SOLUTION OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM GIVEN FOR OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIFTH ORDER WITH A CONTINUOUS COEFFICIENT

**Abulfez Mammadov**

In this work the definition of regular solution and regular solvability of boundary problem for one ordinary operator-differential equation of fifth order with a continuous coefficient in  $R_+ = (0, \infty)$  has been given and the regular solvability of that problem has been proved.

**Key words:** *normal operator, Hilbert space, operator-differential equation, regular solution, regular solvability, boundary problem*

