CAVANŞİR QULİYEV
quliyevcavansircs@gmail.com
ARAZ QULUSOY
arazqulusoycs@gmail.com
Naxçıvan Dövlət Universiteti

UTO 517.93

TAM ŞƏKİLLİ QİLBARQ-SERRİN TƏNLİYİ ÜÇÜN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİN VARLIĞI

Məqalə tam şəkilli Qilbarq-Serrin tənliyi üçün bircins sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həllinin varlığı (Viner mənada) araşdırılır. Bu həllin Sobolev fəzasında modifikasiya edilmiş bircins sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həllinin varlığı isbat edilir və verilmiş məsələyə aproksimasiya olunur.

Açar sözlər: *Differensial tənliklər, elliptik, Viner*

Tutaq ki, D n-ölçülü E_n Evklid fəzasında məhdud oblastdır. $n \geq 3, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), 0 \in D$. Bu oblastda tam şəkilli Qilbarq-Serrin tənliyi üçün birinci sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həllinin varlığı bu tənlik üçün şərti, güclü və klassik həllinin varlığından daha geniş xarakter daşıyır.

Məsələnin qoyuluşu

$$\Delta u + \mu(r) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f \qquad (1)$$

tam şəkilli Qilbarq-Serrin tənliyidir.

Burada $r = (x), x \in D, u \in W_{2,\gamma}^{2}(D), f(x) \in C^{x}(D), 0 < x < 1, \varphi(x) \in C(\partial D), b_i(x) \in C^2(D)$ $və$ $M(r)$ funksiyası üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$\mu(r) \in C^{\alpha}(D);\ d_1 \leq \mu(r) \leq d_2;\ d_1 > n - 2, d_2 < \infty. \qquad (2)$$

İndi $D' = D \backslash \{0\}$ və istənilən sabit a ədədi seçib, verilən tənlik üçün modifikasiya edilmiş birinci sərhəd məsələsini qoyaq:

$$Lu = f, x \in D, u|_{\partial D} = \varphi, U(0) = a. \qquad (3)$$

Burada $0 \in (\partial D)$, yəni $U(x)$ funksiyası D' oblastının sərhəd nöqtəsi kimi baxılır. Bu məsələnin həllini Viner mənada ümumiləşmiş həllin varlığı metodikasından istifadə etməklə göstərə bilərik.

Tutaq ki, $\{D_m\}, m = 1, \dots, \partial D_m$ sərhədinə malik oblastlar ardıcıllığıdır. Bu oblastlar ardıcılığı daxilində sərhədə doğru genişlənməklə yaxınlaşır:

$$\overline{D}_m \subset D, \overline{D}_m \subset D_{m+1}, \lim_{m \to \infty} D_m = D. \qquad (4)$$

Bu oblast daxilində $S_m = \left\{x; |x| = \frac{1}{m}\right\}$ sferasına (sərhədinə) malik olan $Q_m = \left\{x; |x| < \frac{1}{m}\right\}$ kürələr ardıcılığı quraq $(m = 1,2, \dots)$:

Tutaq ki, $D'_m = D_m \backslash Q_m$ $(m \in N)$. Aydındır ki, bu şəkildə qurulan D'_m oblastı D-də boş olmayan alt oblastdır. $\{D'_m\}$ oblastlar ardıcıllığı da D'_moblastı daxilində m-in natural qiymətləri üçün boş olmayan oblastlar ardıcıllığı yaradır. D oblastının sərhədi ∂D-də $\varphi(x)$-in kəsilməzliyini qəbul edib daha sonra nəticədə də $\varphi(x)$-in proobrazı olaraq $\phi(x)$ funksiyası tam şəkilli Qilbarq-Serrin tənliyi üçün modifikasiya edilmiş birinci sərhəd məsələsi aşağıdakı kimi verilir:

$$Lu_m = f, x \in D'_m;\ u_m|_{\partial D_m} = \phi|_{\partial D_m}, u_m|_{S_m} = a. \qquad (5)$$

Məlumdur ki, (5) məsələnin istənilən m natural ədədi üçün klassik həlli var. Bu həlli Viner mənada ümumiləşmiş həllə aproksimasiya etmək olur.

Tərif: Əgər $\lim\limits_{m\to\infty} U_m(x) = U_\varphi(x), x \in D'$ limiti varsa, $\varphi(x)$ funksiyası D-dən ∂D-ya davam etdirilmə qaydasından asılı deyilsə, D oblastında aproksimasiya olunmuş $\{D_m\}$ oblastlar ardıcılığı olarsa, onda $U_\varphi(x)$ funksiyasına modifikasiya edilmiş (2) birinci sərhəd məsələsinin Viner mənada ümumiləşmiş həlli deyilir.

Teorem: Tutaq ki, $\mu(r)$ funksiyası (2) şərtlərini ödəyir. Onda hər bir $\varphi(x) \in C(\partial D)$ funksiyası və istənilən $a \in E$, üçün modifikasiya olunmuş birinci sərhəd məsələsinin (2) Viner mənada $U_\varphi(x)$ ümumiləşmiş həlli var. Belə ki, $U_\varphi(x) \in C^2(D'), x \in D'$ üçün $LU_\varphi(x) = f(x)$ olur. Başqa sözlə, $U_\varphi(x)$ funksiyası (1) tənliyini ödəyir.

Bu teoremin isbatı [4] monoqrafiyasında göstərilmiş metoddan və (1) məsələsinin klassik həll olunabilənliyi ilə bağlı isbat olunmuş [3] məqaləsindəki faktorlardan istifadə olunur. Lakin burada əlavə olaraq Viner mənada ümumiləşmiş həllin tərifinin şərtlərini özündə saxlayan $U_m(x)$ funksiyasının varlığı göstərilir.

Tutaq ki, $\varphi(x)$ funksiyası D-nin daxilində ∂D sərhədinə kəsilməz davam etdirilə bilər və $\phi(x) \equiv a, x \in Q_1, \sigma > 0$ qeyd olunmuş ədədi üçün $\overline{D}$ də ikiqat kəsilməz diferensiallanan F(x) funksiyası, $F(x) = a, x \in Q_1$ olduqda və

$$|\phi(x) - F(x)| < \sigma, x \in \overline{D}$$

olduqda aşağıdakı kimi funksiyalar quraraq:

$$\begin{cases} F^+(x) = \dfrac{F(x)}{2} + A\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\ F^-(x) = \dfrac{F(x)}{2} - A\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{cases}$$

Bu funksiyaların hər birinin (1) tənliyini ödədiyini asanlıqla göstərmək olar.

$$F^+(x) + F^-(x) = F(x), x \in D$$

Deməli, F(x)-də verilmiş məsələnin həllidir.

Digər tərəfdən bu məsələnin $\{u_m^+(x)\}\ və\ \{u_m^-(x)\}$ ardıcıllıqları şəklindəki

$$\begin{cases} u_m^+(x) \geq F^+(x) - \dfrac{A}{m^2} \\ u_m^-(x) \leq F^-(x) + \dfrac{A}{m^2} \end{cases}$$

həllinə baxaq:

Bilirik ki, bu funksiyalar cəmi

$$\gamma_m(x) = u_m^+(x) + u_m^-(x)$$

İstənilən m natural ədədi üçün (2) məsələsinin həllidir. $u_m(x)$ və $\gamma_m(x)$ həlləri üçün

$$L(u_m - \gamma_m) = 0, x \in D', (u_m - \gamma_m)|_{\partial D_m} = (\phi - F)|_{\partial D_m}$$

$$|u_m - \gamma_m|_{s_m}$$

Maksimum prinsipini tətbiq etsək, alarıq:

$$\sup_{D'_m} |u_m - \gamma_m| \leq \sup_{\partial D'_m} |\phi - F| \leq \sup_{\overline{D}} |\phi - F|$$

Axırıncı bərabərsizlikdən

$$\sup_{D'_m} |u_m - \gamma_m| < \sigma$$

alırıq.

Qeyd etmişik ki, $U_\varphi(x) \in C^2(D')$.

$$Lu_m(x) = f(x), x \in D'$$

Tərifə görə $Lu_\varphi(x) = f(x), x \in D'$ olur.

Beləliklə, isbat olunur ki, tam şəkilli Qilbarq-Serrin tənliyi üçün bircins sərhəd məsələsi ümumiləşmiş həllə malikdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Алхутов Ю.А. О классе эллрмигеских уравнений с виперовским условием регилярности границных точек/ НЗВ. АНССР, СЕР. ФТМН. 1987, №3, с.22-29
2. Мамедов У.Т. Об устранимых мижествах решений уранения Рилвага Серрипа в пространстве гельдевобых финкций/ Узв АН Азер в. Сер ФТМН, 1998. Т XVIIШ с.46-51
3. Quliyev C.X. Classical solvability of thr first boundary Value problem for Gilbarg - Serrin equation/Trans. Of Acad. Sci. Azerb. 2000.V. XX №1
4. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического параболического типов // М.: 1971, «Наука», 288 с.

SUMMARY

Javanshir Guliyev, Araz Gulusoy

EXISTENCE OF A GENERALIZED SOLUTION FOR THE FULL-FORM GILBARG-SERRIN EQUATION

The article investigates the existence of a generalized solution (in the Wiener sense) of the homogeneous boundary value problem for the complete Gilbarg-Serrin equation. The existence of a generalized solution of the modified homogeneous boundary value problem in the Sobolev space of this solution is proved and approximated to the given problem.

Key words: *Differential equations, elliptic, Viner*

РЕЗЮМЕ

ДжаванширГГулиев, Араз Гулусой

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГИЛБАРГА-СЕРРИНА ПОЛНОЙ ФОРМЫ

В статье исследуется существование обобщенного решения (в смысле Винера) однородной краевой задачи для полного уравнения Гилбарга-Серрина. Доказано существование обобщенного решения модифицированной однородной краевой задачи в пространстве Соболева этого решения и аппроксимировано к данной задаче.

Ключевые слова: *Дифференциальные уравнения, эллиптический, Винер*