

FİZİKA- RİYAZİYYAT VƏ TEXNİKİ ELMLƏR

SABİT ƏYRİLİKLİ HƏNDƏSƏNİN BOTANİKA İLƏ BAĞLI BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİ ÜÇÜN ALINAN TƏNLİKLƏRİN POLYAR KOORDİNANTLARLA GÖSTƏRİŞİ

Cavanşir QULİYEV , **Nahibə ƏSGƏROVA** , **Nurgün ORUCLU** 

Naxçıvan Dövlət Universiteti, Naxçıvan, Azərbaycan

*Yazışılan müəllif: nahibe.esgerova@ndu.edu.az

NƏŞR TARİXİ:

Qəbul edilmə tarixi:

06.06.2026

Nəşr edilmə tarixi:

25.06.2026

AÇAR SÖZLƏR:

ikitehtibli əyrilər,
Kassini ovalı,
sikloidlər, qızıl gül,
polyar koordinatlar

XÜLASƏ

Riyaziyyatda funksiyaların öyrənilməsi, tənlik və bərabərsizliklərin həlli, eləcə də texniki, fiziki və astrofiziki proseslərin modelləşdirilməsi zamanı sabit əyrilikli həndəsənin elementlərindən geniş istifadə olunur. Bu baxımdan müstəvi əyrilər həmin həndəsənin mühüm və geniş bir bölməsini təşkil edir və müxtəlif təbiətli hadisələrin riyazi təsvirində əhəmiyyətli rol oynayır. Bununla yanaşı, mövcud tədris proqramlarında bu sahəyə dair biliklər çox vaxt sistemli və tətbiqönlü şəkildə təqdim olunmur ki, bu da mövzunun dərinəndən mənimsənilməsini müəyyən qədər çətinləşdirir. Məqalədə müstəvi əyrilər ailəsinin bəzi əsas nümayəndələri – ikitəhtibli əyrilər, ovallar, konxoidlər və sikloidal əyrilər haqqında qısa nəzəri məlumat verilmiş, onların əsas xassələri və təsnifatı izah edilmişdir. Xüsusi olaraq Kassini ovaları və qızıl gül əyriləri kimi klassik nümunələrə diqqət yetirilmişdir. Daha sonra botanika ilə əlaqəli olan bəzi təbii formaların (yarpaqlar, güllər, sünbüllər və s.) riyazi modelləri qurulmuş, bu modellər həm düzbucaqlı, həm də polyar koordinat sistemində təqdim edilmiş və uyğun çevrilmələr izah olunmuşdur. Aparılan yanaşma göstərir ki, təbiətdə müşahidə olunan bir çox morfoloji strukturlar müəyyən riyazi qanunauyğunluqlara tabedir və analitik həndəsə vasitəsilə təsvir oluna bilər. Xüsusilə polyar koordinat sisteminin tətbiqi bu cür formaların daha sadə, simmetrik və vizual şəkildə ifadəsinə imkan yaradır. Bu isə həm elmi tədqiqatlar, həm də tədris prosesi baxımından mövzunun əhəmiyyətini daha da artırır.

GİRİŞ

Müasir elmin və ictimai həyatın elə bir sahəsi yoxdur ki, orada müstəvi əyrilərindən istifadə olunmasın. Fizika, riyaziyyat, mexanika, astronomiya və digər texniki elmlərdə müxtəlif proseslərin öyrənilməsi və modelləşdirilməsi zamanı əyrilər mühüm rol oynayır. Bu baxımdan müstəvi əyrilər həm nəzəri, həm də tətbiqi baxımdan riyaziyyatın əsas tədqiqat obyektlərindən biri hesab olunur (Bakelman, 1967: s.12).

Klassik müstəvi əyriləri, adətən, formalarının oxşarlığına və analitik xüsusiyyətlərinə görə müxtəlif siniflərə ayrılır. Bunlara birtəhtibli və ikitəhtibli əyrilər (çevrə, ellips, parabola, hiperbola), ovallar (Kassini ovaları, Bernulli lemniskatı, Dekart ovalı və s.), konxoidlər (Nikomeda konxoidi, Paskalın iblisi), müxtəlif növ spirallar (cəbr və transsendent spirallar, Arximed, hiperbolik və loqarifmik spirallar, Ferma spiralı və s.), eləcə də sikloid, episikloid və hiposikloid əyriləri daxildir (Gray, 2018: s.66). Bu əyrilər müstəvi əyrilər ailəsinin zənginliyini və müxtəlifliyini əks etdirir.

Qeyd etmək lazımdır ki, bu əyrilərin bir çoxu yalnız nəzəri konstruksiyalar olmayıb, həm də təbiətdə və texnikada real şəkildə müşahidə olunur. Onlara həm canlı aləmdə (bitki və digər bioloji strukturların formalarında), həm də cansız təbiətdə və texniki sistemlərdə (fiziki, hidrodinamik və astronomik proseslərdə) rast gəlinir. Bu isə onların riyazi modelləşdirilməsinin mümkünlüyünü və praktiki əhəmiyyətini göstərir (Pressley, 2010: s.20-22).

Həndəsi formaların riyazi nəzəriyyəsi çərçivəsində botanika ilə bağlı məsələlər xüsusi maraq doğurur. Bitkilərin yarpaqları, çiçəkləri, sünbülləri və digər morfoloji elementləri müəyyən riyazi qanunauyğunluqlara uyğun formalaşır və bu formaların analitik üsullarla öyrənilməsi həm elmi, həm də pedaqoji baxımdan əhəmiyyətlidir (Gielis, 2017: s.127-131). Belə tədqiqatlar bir tərəfdən

riyaziyyatın tətbiq sahələrini genişləndirir, digər tərəfdən isə gənc nəslin elmi dünyagörüşünün formalaşmasına və onlarda riyaziyyata marağın artmasına müsbət təsir göstərir.

MATERİALLAR VƏ METODLAR

Bu tədqiqat işində müstəvi əyrilər nəzəriyyəsi və onların botanika ilə əlaqəli tətbiqlərinin öyrənilməsi üçün analitik və müqayisəli yanaşmalardan istifadə edilmişdir. Tədqiqatın əsasını klassik və müasir riyazi ədəbiyyatın təhlili təşkil edir. Bu məqsədlə müstəvi əyrilər, xüsusilə oval əyrilər, Kassini ovalları, sikloidal əyrilər və qızıl gül əyriləri ilə bağlı elmi mənbələr araşdırılmış və ümumiləşdirilmişdir.

Metodoloji baxımdan işdə analitik həndəsə üsulları tətbiq olunmuşdur. Əyrilərin tənliklərinin alınması və tədqiqi zamanı düzbucaqlı (Kartezian) və polyar koordinat sistemləri arasında keçidlərdən istifadə edilmişdir. Bu keçidlər vasitəsilə əyrilərin daha sadə və simmetrik təsviri əldə olunmuşdur.

Bitki strukturlarının modelləşdirilməsi üçün riyazi abstraksiya metodundan istifadə edilmiş, təbiətdə müşahidə olunan formalar uyğun analitik tənliklərlə ifadə olunmuşdur. Xüsusilə qızıl gül əyriləri və digər polyar tənliklər vasitəsilə yarpaq, çiçək və sünbül formalarının modelləri qurulmuşdur.

Həmçinin, seçilmiş əyrilərin əsas xassələrinin təhlili aparılmış, onların parametrlərdən asılı olaraq dəyişmə xüsusiyyətləri araşdırılmışdır. Müxtəlif hallar üçün konkret nümunələr nəzərdən keçirilmiş və onların qrafik təsvirləri şərh olunmuşdur.

ƏSAS HİSSƏ

Botanikada sabit əyrilikli həndəsə ilə bağlı komponentlər dedikdə, əsasən düzgün həndəsi formaya, harmoniya və simmetriyalara, qızıl-bölgü düzlüyünə malik olan yarpaqlar, güllər, sünbüllər, qanadlar və s. başa düşülür. Düzgün həndəsi formaların əksəriyyəti ovallarla bağlıdır: oval dedikdə müstəvi üzərində götürülən qabarıq qapalı cəbri əyri başa düşülür, yunanca yumurta şəkilli deməkdir. Ovalın ən azı dörd nöqtəsi var ki, bu nöqtələrdə əyrilik radiusu ən böyük və ya ən kiçik qiymətlər alır. Digər tərəfdən ovalın bir-birinə paralel olan toxunanları arasındakı məsafə sabit bir ədədə bərabər olarsa, onda onun uzunluğu bu ədədlə π -nin hasilinə bərabər olur (Needham, 2021: s.78-81).

Burada kassini ovalını xatırlatmaq yerinə düşər: Müstəvi üzərində verilmiş iki nöqtədən məsafələri hasili sabit bir ədədə bərabər olan nöqtələrin həndəsi yerinə Kassini ovalı deyilir. Fransız riyaziyyatçısı Dominik Kassini (1625-1712) tərəfindən təyin edilən bu ovalın düzbucaqlı koordinantlarla tənliyi aşağıdakı kimidir (Kaplan, 2019: s.34-36).

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - a^4 = 0 \quad (a, c > 0) \quad (1)$$

Bu tənliyi polyar koordinantlarla verək:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

(2)-ni (1)-də nəzərə alsaq və sadələşdirsək

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + a^4 - c^4} \quad (3)$$

alırıq. Göründüyü kimi Kassini ovalı dördtərtibli cəbri əyridir. Bu əyri koordinant oxlarına nəzərən simmetrik olur. Burada a və c parametrlərinin qiymətləndirilməsindən asılı olaraq müxtəlif şəkilli ovallar almaq olar. Bitkilərin həndəsəsinin yaradılmasında sikloidlərin böyük rolu var.

Müstəvi üzərində xətlərin çəkilməsinin kinematik qaydalarından biri müəyyən qanunauyğunluqla hərəkət edən nöqtənin trayektoriyasının təyini. Çevrənin diyirlənməsi ilə əlaqədar olan xətlər sikloidal adlanır.

Qızıl güllərin tənliyi sikloidal əyrilər ailəsinə aid edilərək təyin olunur: Polyar tənliyi

$$\rho = a \sin k\varphi \quad \text{və ya} \quad \rho = a \cos k\varphi \quad (4)$$

şəklində olan əyriyə qızıl gül deyilir (Nəşibov, 1985: s.54-58).

Burada a və k sabit ədədlərdir. İtaliya alimi Qvado Qrandın 1728-ci ildə ilk dəfə bununla bağlı məlumat vermişdir. (4) münasibətindən göründüyü kimi bütün qızıl güllər a radiuslu dairedə yerləşir. $\sin k\varphi, \cos k\varphi$ periodik olduğundan bütün qızıl güllər konkret ləçəklərdən ibarətdir. k –nın tək və cüt olmasından asılı olaraq ləçəklərin sayı k və $2k$ sayda olur. Aşağıda müxtəlif sayda ləçəkləri olan qızıl gül tənliklərini veririk:

- 1) $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$ iki ləçəkli
 - 2) $\rho = a \sin 3\varphi$ üç ləçəkli
 - 3) $\rho = a \sin 2\varphi$ dörd ləçəkli
 - 4) $\rho = a \sin 4\varphi$ səkkiz ləçəkli qızıl gül
- tənlikləridir (Nəşibov, 1985: s.91-93). Qeyd edək ki, qızıl gülün bir ləçəyinin sahəsi

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/k} \rho^2 d\varphi = \frac{\pi a^2}{4k}. \quad (5)$$

I. Üçləçəkli qızıl gül:

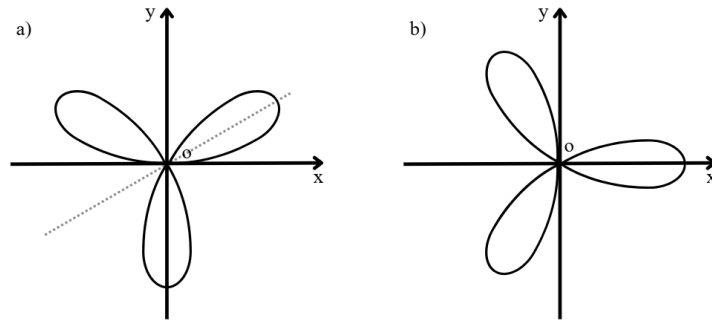
Düzbucaqlı koordinatlarda üçləçəkli qızıl gülün tənliyi

$$(x^2 + y^2)^2 - ay(3x^2 - y^2) = 0 \quad (a > 0) \quad (6)$$

şəklində verilmişdir. Bu tənliyi polyar koordinatlara keçməklə aşağıdakı şəkllə salmaq olar:

$$\rho = a \sin 3\varphi \quad \text{və ya} \quad \rho = a \cos 3\varphi \quad (7)$$

Bu şəkildə polyar tənlikləri ilə verilmiş üçləçəkli qızıl gülün həndəsi təsviri aşağıdakı kimidir:



Şəkil 1.

Burada ləçəyin ən böyük diametri a –ya, onun ümumi sahəsi:

$$S = \frac{3}{4} \pi a^3.$$

II. Dörtləçəkli qızıl gül: Düzbucaqlı koordinant sistemində tənliyi

$$(x^2 + y^2)^3 - 4a^2 x^2 y^2 = 0, a > 0 \quad (8)$$

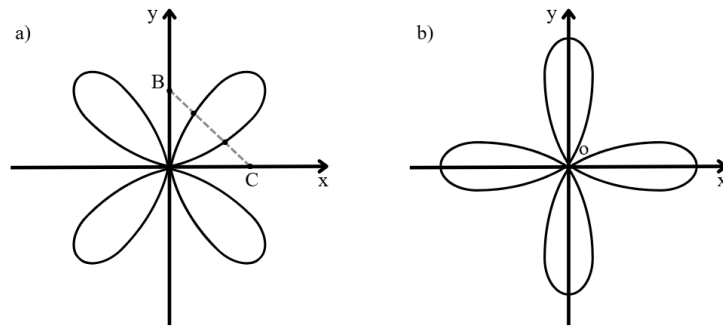
şəklindədir. Bu altı tərtibli cəbri tənlikdir.

Bu tənliyi polyar koordinatlarda yazmaqla onu kanonik şəkllə gətirmək olar:

$$\rho = a \sin 2\varphi \quad (9)$$

$$\rho = a \cos 2\varphi \quad (10)$$

Polyar koordinatları (9) və (10) olan halda dörtləçəkli qızıl gülün qrafikləri uyğun olaraq aşağıdakı şəkildə göstərilir.



Şəkil 2.

Uzunluğu $2a$ olan BC parçasını ucları koordinat oxları üzərində olmaqla fırladaraq, $O(0,0)$ nöqtəsindən bu parçaya endirilmiş perpendikulyarların oturacaqlarının həndəsi yeri dörd ləçəkli qızıl gül verir. Onun hər bir ləçəyinin sahəsi:

$$S = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

III. Sümbüllərin tənliyi: Polyar tənliyi

$$a) \rho = \frac{a}{\sin k\varphi} \quad \text{və} \quad b) \rho = \frac{a}{\cos k\varphi} \quad (11)$$

olan müstəvi əyrilərə “sümbül” deyilir ($a > 0$)

Həndəsi olaraq bu əyrilərin budaqları arpa sümbülünün formasını xatırladır. (11) tənlikləri ilə ifadə olunan əyrilər qızıl güllərə yaxın əyrilərdir. Onlar qızıl gül əyrilərinin radiusu a olan çevrəyə nəzərən inversiyası hesabına alınır (Nəsimov 1985: s.145-147).

Bitki yarpaqlarının tənlikləri:

Yuxarıda gördük ki, əyrilər müxtəlif formalı maddi varlığı əks etdirir. XIX əsrdə alman təbiətşünas-riyaziyyatçı Xabenix bir sıra çiçəklərin və yarpaqların formalarının riyazi tənliklərini öyrənmişdir. Bunlardan

1. Yasəmən yarpağının polyar tənliyi

$$\rho = 5 + 2\cos\varphi + 3\cos^3\varphi$$

2. Gicitkan yarpağının polyar tənliyi

$$\rho = 5 + 2\cos\varphi + 3\cos^3\varphi - \sin^2 18\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{4}$$

3. Yonca yarpağının polyar tənliyi

$$\rho = 4(1 + \cos 3\varphi) - 4\sin^2 3\varphi$$

4. Sarmaşiq yarpağının polyar tənliyi

$$\rho = 3(1 + \cos^2\varphi) + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^2 3\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2}$$

Qızıl gül tənlikləri ilə bağlı bir misala baxaq:

Tutaq ki, polyar tənliyi

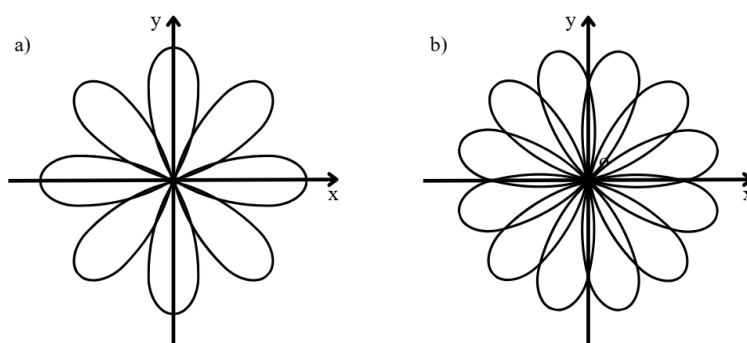
$$\rho = \sin \frac{m}{n} \varphi \quad (m; n=1, 2, \dots)$$

şəklində verilmişdir. ((4)-də k rasional ədəd kimi verilir).

Əgər m – cüt, n – tək ədəd olarsa, ləçəklərin sayı $2m$, olur. Məsələn,

a) $\rho = \sin \frac{4}{3} \varphi$ səkkiz ləçəkli qızıl gül olur (Ş.3.a)

- b) m -tək, n -cüt olarsa isə $2m$ ləçəkli qızıl gül olur. Məsələn $\rho = \sin \frac{5}{2} \varphi$ üçün on ləçəkli qızıl gül alınar. (Ş.3.b)



Şəkil 3.

NƏTİCƏLƏRİN MÜZAKİRƏSİ

Bu məqalədə müstəvi əyrilər nəzəriyyəsinin bəzi mühüm istiqamətləri araşdırılmış və onların botanika ilə əlaqəsi sistemli şəkildə təqdim olunmuşdur. Xüsusilə oval əyrilərin ümumi riyazi xüsusiyyətləri nəzərdən keçirilmiş, bu tip əyrilərin həndəsi və analitik təsviri verilmişdir.

Sikloidal əyrilərin həndəsi interpretasiyası göstərilmiş və onların vasitəsilə təbiətdə, xüsusilə bitki strukturlarında rast gəlinən formaların modelləşdirilməsi mümkün olduğu əsaslandırılmışdır. Qızıl gül əyrilərinin polyar koordinat sistemində ifadəsi ətraflı şəkildə təqdim edilmiş, parametrdən asılı olaraq müxtəlif formalı əyrilərin alınması nümayiş etdirilmişdir.

Bundan əlavə, sümbül formalı əyrilər və bir sıra bitki yarpaqlarının riyazi modelləri polyar tənliklər vasitəsilə ifadə olunmuşdur. Qızıl gül əyrilərinə aid konkret nümunə və misalların araşdırılması isə nəzəri biliklərin tətbiqi baxımından mühüm rol oynamışdır.

Aparılan tədqiqat göstərir ki, müstəvi əyrilər nəzəriyyəsi botanika ilə sıx əlaqədə olub, təbiətdə müşahidə olunan bir çox formaların riyazi modelləşdirilməsində effektiv vasitə kimi çıxış edir.

NƏTİCƏ

Alınan nəticələr göstərir ki, təbiətdə müşahidə olunan morfoloji strukturların əhəmiyyətli hissəsi müəyyən riyazi qanunauyğunluqlara əsaslanır və bu qanunauyğunluqlar analitik həndəsə vasitəsilə uğurla izah edilə bilər. Xüsusilə polyar koordinat sisteminin tətbiqi mürəkkəb formalı əyrilərin daha sadə və simmetrik şəkildə təsvirinə imkan yaradır.

Qızıl gül əyriləri və sikloidal xətlər kimi klassik əyrilərin botanika obyektlərinin modelləşdirilməsində istifadəsi göstərir ki, riyaziyyat yalnız abstrakt elm deyil, həm də real təbiət hadisələrinin dərk olunmasında mühüm vasitədir. Bu isə riyaziyyatın tətbiqi potensialını və digər elmlərlə inteqrasiyasını bir daha təsdiq edir.

Eyni zamanda, bu cür yanaşma tədris prosesində də mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Riyazi anlayışların real obyektlərlə əlaqələndirilməsi tələbələrin mövzunu daha dərinlən mənimsəməsinə, onların analitik düşünmə qabiliyyətinin inkişafına və riyaziyyata marağının artmasına şərait yaradır.

Gələcək tədqiqatlarda daha mürəkkəb bitki strukturlarının modelləşdirilməsi, həmçinin kompüter qrafikası və riyazi proqramlaşdırma vasitəsilə bu əyrilərin vizuallaşdırılması istiqamətində işlərin aparılması məqsədəuyğun hesab edilə bilər.

ƏDƏBİYYATLAR

- Bakelman, İ. Ya. (1967). Ali həndəsə. Moskva, 464s.
- Gielis, J. (2017). The geometric beauty of plants: Modeling natural forms. Atlantis Press, 220p.
- Gray, A. (2018). Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica (3rd ed.). CRC Press, 704p.
- Kaplan, C. S. (2019). Introduction to geometric computing. Morgan & Claypool, 200p.
- Needham, T. (2021). Visual differential geometry and forms: A mathematical drama in five acts. Princeton University Press, 608p.
- Nəsimov, M. X. (1985). Qəribə əyrilər. Maarif nəşriyyatı, 154s.
- Pressley, A. (2010). Elementary differential geometry (2nd ed.). Springer, 432p.

SUMMARY

REPRESENTATION IN POLAR COORDINATES OF THE EQUATIONS OBTAINED FOR SOME PROBLEMS OF GEOMETRY WITH CONSTANT CURVATURE RELATED TO BOTANY

Javanshir Guliyev, Nahiba Asgarova, Nurgun Orujlu
Nakhchivan State University, Nakhchivan, Azerbaijan

Elements of constant curvature geometry are widely used in mathematics in the study of functions, the solution of equations and inequalities, as well as in the modeling of technical, physical, and astrophysical processes. In this context, plane curves constitute an important and extensive part of this branch of geometry and play a significant role in the mathematical description of phenomena of various natures. However, in existing educational programs, knowledge in this area is often not presented in a systematic and application-oriented manner, which makes a deeper understanding of the subject somewhat difficult. In the article, a brief theoretical overview of some main representatives of the family of plane curves—second-order curves, ovals, conchoids, and cycloidal curves—is provided, and their main properties and classification are explained. Special attention is given to classical examples such as Cassini ovals and rose curves. Furthermore, mathematical models of certain natural forms related to botany (leaves, flowers, spikes, etc.) are constructed and presented in both Cartesian and polar coordinate systems, along with the corresponding transformations. The proposed approach demonstrates that many morphological structures observed in nature follow specific mathematical regularities and can be described using analytical geometry. In particular, the use of the polar coordinate system allows these forms to be represented in a simpler, more symmetric, and visually intuitive way. This, in turn, increases the significance of the topic both in scientific research and in the educational process.

Keywords: *second-order curves, Cassini oval, cycloids, rose (rose curve), polar coordinates*

АННОТАЦИЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ, СВЯЗАННЫХ С БОТАНИКОЙ

Джаваншир Гулиев, Нахиба Аскерова, Нургюн Оруджлу
Нахчыванский государственный университет, Нахчыван, Азербайджан

Элементы геометрии с постоянной кривизной широко используются в математике при изучении функций, решении уравнений и неравенств, а также при моделировании технических, физических и астрофизических процессов. В этом контексте плоские кривые

составляют важный и обширный раздел данной области геометрии и играют значительную роль в математическом описании явлений различной природы. Вместе с тем в существующих учебных программах знания в данной области зачастую представлены недостаточно системно и слабо ориентированы на практическое применение, что в определённой степени затрудняет глубокое освоение материала. В статье приведён краткий теоретический обзор некоторых основных представителей семейства плоских кривых — кривых второго порядка, овалов, конхоид и циклоидальных кривых, а также рассмотрены их основные свойства и классификация. Особое внимание уделено классическим примерам, таким как овалы Кассини и розы. Далее построены математические модели некоторых природных форм, связанных с ботаникой (листья, цветы, колосья и др.), которые представлены как в декартовой, так и в полярной системе координат с объяснением соответствующих преобразований. Проведённый анализ показывает, что многие морфологические структуры, наблюдаемые в природе, подчиняются определённым математическим закономерностям и могут быть описаны средствами аналитической геометрии. В частности, использование полярной системы координат позволяет представить такие формы в более простой, симметричной и наглядной форме. Это, в свою очередь, повышает значимость рассматриваемой темы как для научных исследований, так и для учебного процесса.

Ключевые слова: *кривые второго порядка, овал Кассини, циклоиды, роза (кривая розы), полярные координаты*