

RİYAZİYYATIN TƏDRİSİNDƏ KOMPLEKS ƏDƏDLƏRİN DAXİL EDİLMƏSİ VƏ KVADRAT ÜÇHƏDLİNİN KÖKLƏRİNİN TAPILMASI MƏSƏLƏLƏRİ

Rövşən Həsənov¹

<https://orcid.org/0000-0001-8398-9018>

hrovsen.2020@gmail.com

²Cənnət Həsənova

<https://orcid.org/0000-0001-8315-9018>

cnthsnova550@gmail.com

^{1,2}Naxçıvan Dövlət Universiteti, Naxçıvan Azərbaycan

*Yazılış müəllif: hrovsen.2020@gmail.com; Tel.: +55-975 49-81

XÜLASƏ

Ümumtəhsil məktəblərinin Riyaziyyat fənnində kompleks ədədlər haqqında zəruri materialın verilməsi həyata keçirilir. Bu materialın daxil edilməsi bir sıra səbəblərlə bərabər, həm də kvadrat üçhədlinin köklərinin varlığı və onların tapılması qaydası ilə ciddi sürətdə əlaqəlidir. Əvvəlcə, kompleks ədədlərin ümumtəhsil məktəblərdə riyaziyyatın tədrisində, həmçinin elementar riyaziyyatda daxil edilməsi ideyası araşdırılmışdır. Bundan sonra, kvadrat üçhədlinin köklərinin, tam kvadrat ayırmaq üsulu ilə, tapılması məsələsi araşdırılmış və bu prosesdə diqqətdən kənar qala biləcək şərti razılışmalar izah olunmuşdur. Axırda, ali pedaqoji məktəblərin cəbr kursunun tədrisində kompleks ədədlərin daxil edilməsi üsulları və onlarla bağlı məsələlər ciddi riyazi şəkildə izah olunmuşdur.

Açar sözlər: *kompleks ədəd, kvadrat üçhədlinin kökləri, şərti razılışma, kompleks genişlənmə, minimal genişlənmə*

GİRİŞ

Elementar riyaziyyatda kompleks ədədlərin daxil edilməsi metodikası

Ümumtəhsil məktəblərinin Riyaziyyat fənnində “Kompleks ədədlər” mövzusunun tədris edilməsi nəzərdə tutulub və həyata keçirilir [4, səh. 273 – 284]. Kompleks ədədin daxil edilməsi onunla əlaqəlidir ki, həqiqi ədədlər çoxluğunda kvadratı (-1) –ə bərabər olan həqiqi ədəd yoxdur. Başqa sözlə, həqiqi ədədlər çoxluğunda $x^2 = -1$ və ya $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin həlli yoxdur. Buradan görünür ki, həqiqi ədədlər çoxluğunu elə genişləndirmək lazımdır ki, $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin kökü mövcud olsun. Belə yanaşma ilə şagirdlər tanışdırlar. Məsələn, natural çoxluğunda $x + 1 = 0$ tənliyin həlli yoxdur. Mənfi ədəd anlayışı verilərək, natural ədədləri mənfi natural ədədlər və sıfırla genişləndirilməsi nəticəsində tam ədədlər çoxluğu alınır və $x + 1 = 0$ tənliyin həlli $x = -1$ olur. Bu qayda ilə davam edilərək, $ax + b = 0$, $a \neq 0$ tənliyin həlli olması üçün tam ədədlər çoxluğu kəsr ədədlə genişləndirilir və rəasional ədədlər çoxluğu alınır, bu çoxluqda bölmə əməli həmişə mümkündür (sıfıra bölmədən başqa). Rəasional ədədlər çoxluğunda, məsələn $x^2 = 2$ tənliyinin kökü yoxdur. Nəticədə rəasional ədədlər çoxluğunu irrəasional ədədlərlə genişləndirmək lazım gəlir, həqiqi ədədlər çoxluğu meydana çıxır, $x^2 - 2 = 0$ tənliyi həll edilən olur.

$x^2 + 1 = 0$ tənliyinin kökünün olması üçün yeni bir ədəd (simvol) i daxil edilərək, hesab edilir ki, o, $x^2 + 1 = 0$ tənliyin köküdür, yəni bu tənliyin $i^2 = -1$ olmaqla köklər $x_{1,2} = \pm i$ olur. Beləliklə, elementar riyaziyyatda kompleks ədəd anlayışının verilməsi zərurəti yaranır [5, səh. 90].

$a + bi$ şəklində ifadələrə (burada a, b –həqiqi ədədlərdir və i hər hansı simvoldur), onlar üçün bərabərlik, toplama və vurma münasibətləri aşağıdakı kimi təyin olunarsa kompleks ədədlər deyilir:

1. İki $a + bi$ və $c + di$ ədələri yalnız və yalnız $a = c, b = d$ olduqda bərabər hesab olunurlar;
2. İki $a + bi, c + di$ kompleks ədədinin cəmi $(a + c) + (b + d)i$ kompleks ədədinə deyilir.
3. $a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədlərinin hasil $(ac - bd) + (ad + bc)i$ kompleks ədədinə deyilir.

İki kompleks ədədin vurulmasına istinad edilərək i^2 hesablanır.

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0 \cdot 0 - i \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1$$

Beləliklə, kompleks ədədlər üzərində hesab əməllərini icra edərkən, istənilən aralıq əməllərdə və ya son nəticədə i^2 ədədini -1 ədədi ilə əvəz etmək olar. Məhz $i^2 = -1$ bərabərliyi bəzən $i = \sqrt{-1}$ yazılışının səbəbi olur. Lakin bu yazılış korrekt deyildir. Çünki, $\sqrt{\quad}$ simvolu müsbət ədədin hesabi kökü deməkdir[5, səh. 101].

$i^2 = -1$ bərabərliyini belə ifadə etmək lazımdır: kvadratı (-1) –ə bərabər olan ədəd i –dir, o xəyali ədəd adlanır.

Kompleks ədədlər haqqında məlumatların genişləndirilməsi və kompleks ədədlərlə bağlı olan mühakimələrdə müəyyən edilən yanlışlıqları göstərmək məqsədi ilə $ax^2 + bx + c$ –kvadrat üçhədlisinin kökləri düsturunu araşdırmaq lazım gəlir [5, səh. 118 – 122].

Ümumtəhsil məktəbləri üçün Riyaziyyat 8 dərslində [3, səh 94] kvadrat tənliyinin kökləri düsturuna müəyyən edərək, aparılan mühakimələrin kvadrat üçhədlisinin uyğun məsələsi üçün də doğru olduğunu nəzərə alıb, onu şərh edirlər.[3, səh. 90]. Qeyd edək ki, bu material Riyaziyyat 10 dərslində kompleks ədədlərin öyrənilməsi üçün propedevtik xarakter daşıyır [3, səh. 94].

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

tənliyi verilir.

$$D = b^2 - 4ac \quad (2)$$

işarə edilir. D kvadrat tənliyin ediskriminantı (ayırdeçicisi) adlanır. Kvadrat tənliyinin köklərinin varlığı D –nin işarəsindən asılıdır. (1) tənliyinin kökləri düsturu, tam kvadrat ayırmaqla və (2) işarələməsinə nəzərə alaraq

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (3)$$

kimi yazılır. (1) tənliyinin kökləri, D –nin işarəsindən asılı olaraq aşağıdakı kimi müəyyən edilir.

1. $D > 0$ olarsa, tənliyin iki müxtəlif həqiqi kökü vardır: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
2. $D = 0$ olarsa, tənliyin yeganə və ya iki bərabər kökü vardır: $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$
3. $D < 0$ olarsa, tənliyin kökləri yoxdur.

Bu məsələyə, Riyaziyyat 10 dərslində bir də qaydılır [4, səh. 273].

$x^2 = -1$ şərtini ödəyən həqiqi ədəd yoxdur. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi kvadratı -1 ədədinə bərabər olan ədədi i ilə işarə edilir. Onda, $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin iki kökü olur: $x_{1,2} = \pm i$.

Beləliklə, həqiqi ədədlər çoxluğunu elə genişləndirmək lazımdır ki, yeni çoxluğa həqiqi ədədlərlə bərabər i -də mənsub olsun. Bununla bərabər toplama və vurma əməllərinin həqiqi ədədlər meydanında məlum xassələri yeni qurulmuş meydan üzərində də ödənilsin. Beləliklə, kompleks ədədlərin daha ciddi şəkildə ali pedaqoji məktəblərin cəbr kursunda daxil edilməsi yolları araşdırılır[2,6].

Hələlik, kvadrat üçhədlinin köklərinin və habelə uyğun ciddi diqqət verilməli cəhətləri araşdırmaq.

1. Kvadrat üçhəddli və onun kökləri

a, b, c hər hansı həqiqi ədədlərdir və $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c \quad (1)$$

şəklində ifadəyə x –ə nəzərən kvadrat üçhəddli deyilir. a, b, c ədədləri (1) kvadrat üçhədlinin əmsalları adlanır, həqiqi ədədlər olduğu qəbul edilir. x –in (1) kvadrat üçhədlisini sıfıra çevirən qiymətlərinə çoxhədlinin kökləri deyilir. Onları tapmaq üçün

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

kvadrat tənliyini həll etmək lazımdır. (2) tənliyini həll edərəkən istifadə edilən üsullardan biri tənliyin sol tərəfindəki ifadədən, yəni kvadrat üçhədlidən tam kvadratın ayrılmasına əsaslanır. (1) kvadrat üçhədlisi aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (3)$$

Onda (2) tənliyi aşağıdakı şəkllə gətirilir:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (4)$$

(2) və (4) tənlikləri ekvivalentdir. Beləliklə, (2) $D = b^2 - 4ac$ işarə etsək

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{D}{4a^2} \quad (5)$$

tənliyi alınır.

D ədədindən asılı olaraq üç hal mümkündür:

1. Əgər $D > 0$ olarsa, onda $\frac{D}{4a^2}$ da müsbət ədəddir, yəni kvadratı $\frac{D}{4a^2}$ olan

iki ədəd vardır: $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ və $-\frac{\sqrt{D}}{2a}$. Burada $\frac{4a^2}{D}$ müsbət ədədin kvadrat köküdür. Beləliklə, $D > 0$ olduqda, (4), yəni (2) tənliyinin, həmçinin (1) kvadrat üçhədlinin iki müxtəlif həqiqi kökü vardır.

2. Əgər $D = 0$ olarsa, onda (4) tənliyi

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \quad (7)$$

şəklini alar. Buradan $\left(x + \frac{b}{2a} \right) = 0$ və $x = -\frac{b}{2a}$ olur. Beləliklə, görünür ki, $D = 0$ olduqda (4) və (2) yeganə $x = -\frac{b}{2a}$ kökünə malik olur. Həmahənglik (eyni formalılıq) xatirinə belə hesab edilir ki, (2) tənliyinin $D = 0$ olduqda, iki kökü vardır və onlar üst-üstə düşürlər.

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Ona görə də, riyaziyyatda qəbul edirlər ki, $D = 0$ olduqda (1) kvadrat üçhədlisinin üst-üstə düşən iki kökü vardır və bu şərt razılaşmalıdır.

3. $D < 0$ halına baxaq. Həqiqi ədədin kvadratı mənfi ədəd ola bilməz, yəni bu halda (4) tənliyi həqiqi kökə malik deyildir. Kvadratı mənfi D ədədinə bərabər olan iki kompleks ədəd vardır. Əgər şərtləşsək ki, onlardan biri \sqrt{D} –dir, onda digəri $-\sqrt{D}$ olar. Deməli kvadratı $\frac{D}{4a^2}$ –na bərabər olan ədədlər $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ və $-\frac{\sqrt{D}}{2a}$ xəyali ədədlərdir. Onda $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ və $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$ alınır. Beləliklə, $D < 0$ olduqda

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ olur.}$$

Beləliklə, göstərdi ki, $D < 0$ olduqda (2) tənliyi (5) düsturu ilə hesablanan və kompleks qoşma ədədlər olan iki kökə malik olur. Bir daha qeyd etmək lazımdır ki, bu hökm şərti mənə daşıyır. Şərtləşməyə əsasən \sqrt{D} ilə kvadratı mənfi D ədədinə bərabər olan kompleks ədədlərindən biri \sqrt{D} ilə işarə edilir. Bu şərti razılaşmadır. $\sqrt{\quad}$ –dən ancaq müsbət həqiqi ədədlərin hesabi kvadrat kökünü işarə etmək üçün istifadə edilir. Kompleks oblastda, bu işarə birqiymətli mənaya malik deyildir. Buna baxmayaraq kvadrat tənliyi həll etdikdə, belə hesab edilir ki, diskriminant mənfi olduqda, \sqrt{D} – kvadratı D –yə bərabər olan iki ədəddən biridir. Demək olar ki, $D < 0$ olduqda köklər üçün (5) düsturu öz qüvvəsində qalır. Beləliklə, göstərilən şərti razılaşmalar ilə aşağıdakı teorem isbat edilir [1, səh. 121 teorem 1].

Əmsalları həqiqi ədədlər olan $ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin, $a \neq 0$ olduqda, (5) düsturu ilə təyin olunan iki kökü vardır.

a) $D > 0$ olarsa, iki müxtəlif həqiqi kökü vardır.

b) $D = 0$ olarsa, üst-üstə düşən iki həqiqi kökü vardır.

c) $D < 0$ olarsa, iki kompleksqoşma kökü vardır.

Ümumtəhsil məktəblərinin Riyaziyyat 10 dərslində kompleks ədədin kvadrat kökünə aşağıdakı kimi tərif verilir [4, səh. 276].

Kvadratı $z - a$ bərabər olan ədədə z kompleks olan ədədin kvadrat kökü deyilir və \sqrt{z} kimi işarə olunur.

Burada, şərti razılaşmaya əsasən \sqrt{z} yazılışı işlədilir.

ədəbiyyatda şərti razılaşmaya diqqət çəkilmədən yazılmış nümunələr verilməsi halları vardır [4, səh. 276].

Nümunə: $x^2 + 4x + 5 = 0$ tənliyini həll edin.

$$\text{Həlli: } x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$x_1 = -2 + i, x_2 = -2 - i$$

Göstərilən tənliyin həlli prosesini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$$

Diskriminant tapılır: $D = b^2 - 4ac$. Tutaq ki, $D < 0$. Yuxarıda istinad edilmiş teoremin 3) halına əsasən kvadratı $D - yə$ bərabər olan ədədlər müəyyən edilir. \sqrt{D} və ya $-\sqrt{D}$. Beləliklə, köklər tapılır.

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$z^2 + 4z + 5 = 0$. Diskriminant tapılır. $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$. $D = -4 < 0$.

Kvadratı $-4 - yə$ bərabər olan ədəd $2i$ və ya $-2i$ olur. Köklər tapılır.

$$z_1 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$$

$$z_2 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

Əmsalları həqiqi ədədlər olan kvadrat tənliyin kompleks köklərinin qarşılıqlı qoşma ədədlər olduğu və Viyet düsturunun doğru olduğu asanlıqla yoxlanılır.

Ədəbiyyatda $z = a + bi$ yazılışı z kompleks ədədinin cəbri şəkli adlanır. Kompleks ədədlər üzərində vurma, bölmə, $n - ci$ dərəcədə natural üstlü $n - ci$ dərəcədə köklərinin tapılması əməllərini yerinə yetirmə üçün onların triqonometrik şəkildə göstərilməsi daha sərfəlidir [4, səh. 280 – 284]. Bu məqsədlə z kompleks ədədinin modulunu və arqumentini tapmaq lazımdır. Həmin anlayışların mahiyyəti Riyaziyyat 10 [4, səh. 278] dərslində verilmişdir.

Müstəvi üzərində $z = a + bi$ kompleks ədədinə uyğun olan nöqtə $M(a; b)$ olsun. OM məsafəsini r , OM şüasının absis oxunan müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağı φ ilə işarə edirlər.

Bundan sonra kompleks modulu və arqumenti anlayışları daxil edilir [4, səh. 278].

Kompleks ədədə uyğun nöqtədən koordinat başlanğıcına qədər r məsafəsinə kompleks ədədin modulu deyilir və $|z|$ kimi işarə olunur:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Son tərəfi OM şüası olan φ dönmə bucağına $z = a + bi$ kompleks ədədinin arqumenti deyilir və $\arg z$ ilə işarə olunur: $\arg z = \varphi = \arctg \frac{b}{a}$

Bu halda $z = a + bi$ kompleks ədədinin triqonometrik şəkli $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kimi olur.

Aydın olur ki, $z = a + bi$ kompleks ədədinin $|z| = r$ modulu birqiymətli olaraq təyin edilir; $\arg z = \varphi$ arqumenti isə 2π dəqiqliyi ilə tapılır. Yəni arqumentlərindən biri φ olarsa, digər qiymətləri $\varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) şəklində olur.

Riyaziyyat 10 dərslində və bir sıra əsərlərdə kompleks ədədin arqumenti $[0; 2\pi)$ aralığında götürülür [2,4,5,6], bir sıra mənbələrdə isə, $(-\pi; \pi]$ aralığında (məsələn [1, səh. 6]) götürülür. $\arg z - z$ kompleks ədədinin baş qiyməti (baş aralığı) adlanır. $\varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) [2,4,5,6] (və ya $\varphi + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) [1]), $\text{Arg } z$ simvolu ilə işarə edilir. $\varphi \in \text{Arg } z$ bucağını birqiymətli təyin etmək üçün uzunluğu 2π olan $(a, a + 2\pi)$ aralığını əvvəlcədən vermək lazımdır.

$\text{Arg } z$ çoxluğunun $(a, a + 2\pi) \in \mathbb{R}$ aralığında yerləşən yeganə birqiymətli arqumentin baş qiyməti $(a, a + 2\pi)$ isə baş aralığı adlanır. Ümid edilir ki, yuxarıda göstərilən mülahizələr məsələlər həllində nəzərə alındıqda, müxtəlif cavablar alınması halları anlaşılmaqlıq yaratmayacaqdır.

Nəhayət, ixtiyari kompleks ədədin n –ci dərəcədən kökünü tapmaq məsələsinə diqqət yetirək. Tutaq ki, $z = a + bi$ ixtiyari kompleks ədəddir. n –ci dərəcədən qüvvəti z –ə bərabər olan ədəd z –in n –ci dərəcədən kökü deyilir və $\sqrt[n]{z}$ ilə işarə olunur.

Ayındır ki, n cüt natural ədəd olduqda $\sqrt[n]{z}$ yazılışı formal yazılışdır. Lakin onun araşdırılmasına ehtiyac duyulmur. Çünki, sıfırdan fərqli ixtiyari kompleks ədədin triqonometrik şəkildə yazılışı mümkündür. Bu isə, göstərilən kompleks ədədlərdən istənilən n –ci dərəcədən ($n \neq 0$) köklərin alınması haqda suallara cavab verməyə imkan verir [6, səh. 171].

Teorem 8.7. Tutaq ki, $c = |c|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ -sıfırdan fərqli kompleks ədəddir və n sıfır olmayan natural ədəddir. c ədədinin n –ci dərəcədən n sayda müxtəlif kökü vardır və onlar aşağıdakı düsturlardan alınır.

$$u_k = |c|^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), (k = 0, 1, \dots, n - 1)$$

$c \neq 0$ olan, kompleks ədəddən n –ci kökalma anlayışı və qaydası verildi. $c = 0$ olan halda isə, onun ixtiyari n –ci dərəcədən kökləri vardır, onlar sıfıra bərabərdirlər.

2. Ali pedaqoji məktəblərdə cəbr kursunun tədrisində kompleks ədədlərin daxil edilməsi üsulları

Yuxarıda, Riyaziyyat 10 dərslində müəyyən edildi ki, $x^2 + 1 = 0$, yəni $x^2 = -1$ tənliyini həll etmək üçün, $x^2 = -1$ bərabərliyini ödəyən həqiqi ədəd olmadığından $i^2 = -1$ şərtini ödəyən i simvolu R çoxluğuna birləşdirilir. Beləliklə, R çoxluğu genişləndirilir və əməllər saxlanılmaqla kompleks ədədlər çoxluğu alınır. Bu ideyanı ehtiva etməklə kompleks ədədlərin daxil edilməsi üsulu ədəbiyyatda, məsələn [6]-da verilir. Həmin genişlənmənin ciddi əsaslandırılmasının mühüm cəhətlərini şərh edək [6, səh. 157 – 162].

Əvvəlcə, meydanın kompleks genişlənməsi anlayışı verilir. Tutaq ki, $F = \langle F, +, -, \cdot, 1 \rangle$ meydanıdır və u isə F çoxluğuna mənsub olmayan elementdir (simvoldur). a və b F meydanının elementləri olmaqla $a + bu$ şəkildə ifadəyə F üzərində u –nun xətti çoxhədlisi (formas) deyilir. a və b –yə $a + bu$ çoxhədlisinin əmsalları deyilir. u –dan asılı iki çoxhədli yalnız və yalnız onların uyğun əmsalları eyni olduqda, bərabər hesab olunurlar.

Xüsus halda F çoxluğunun istənilən a və b elementləri üçün

$$I. a + 0 \cdot u = a, a + bu = b \cdot u \text{ doğrudur.}$$

F meydanı üzərində u –nun bütün xətti çoxhədlilər çoxluğunu K ilə işarə edək:

$$K = \{a + bu | a, b \in F\}$$

K çoxluğunda toplama, əks elementə keçid və vurma əməllərini aşağıdakı düsturlarla təyin edək.

$$II. (a + bu) + (c + du) = (a + c) + (b + d)u; \quad (a +$$

$$- (a + bu) = (-a) + (-b)u; \quad - (a +$$

$$IV. (a + bu)(c + du) = (ac - bd) + (ad + bc)u. \quad (a +$$

$K = \langle K, +, -, \cdot, 1 \rangle$ cəbri xətti çoxhədlilər cəbri adlanır. Həmin cəbrin kommutativ cəbr olması haqqında aşağıdakı teorem isbat edilir [6, teorem 7.1, səh. 158].

Teorem. Tutaq ki, $F = \langle F, +, -, \cdot, 1 \rangle$ meydanıdır. $K = \langle K, +, -, \cdot, 1 \rangle$ F üzərində xətti çoxhədlilər cəbri kommutativ halqadır və F onun althəlqasıdır.

Teoremin isbatı dörd bənddən ibarətdir. 1) Göstərilir ki, I-IV bəndlərinin ödənilməsi K cəbrində əməllər F meydanındakı əməllərin davamıdır, onda $F \preceq K$ olur.

2) $\langle K, +, - \rangle$ cəbri abel qrupdur.

3) $\langle K, \cdot, 1 \rangle$ cəbri monoiddir.

4) K cəbrində vurma topalamaya nəzərən distributivdir.

Beləliklə, isbat olunur ki, K kommutativ halqadır və F meydanı K halqasının althəlqasıdır. Bundan sonra meydanın kompleks genişlənməsi anlayışına tərif verilir [6, səh. 159].

Tərif: Tutaq ki, $F = \langle F, +, -, \cdot, 1 \rangle$ hər bir elementinin kvadratı (-1) –dən fərqli olan meydanıdır. Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə K meydanı F meydanının kompleks genişlənməsi adlanır.

1) F K me
ydanının altmeydanıdır.

2) K
meydanında elə u elementi var ki, $u^2 = -1$ olur;

3) K
meydanının hər bir z elementini $z = a + bu$ şəkildə göstərmək olar, burada $a, b \in F$

Bundan sonra verilən tərifdə göstərilən kompleks genişlənmə anlayışı və onun tərifini formalaşdıran şərtlərdən istifadə edilərək göstərilir.

a) K
meydanın istənilən z elemnti yeganə qayda ilə $z = a + bu$ şəkildə göstərilir, burada $a, b \in F$.

b) $F = \langle$
 $F, +, -, \cdot, 1 \rangle$ meydanının hər bir elementinin kvadratı (-1) –dən

fərqlidir. Onda F meydanının kompleks genişlənməsi var və o, izomorfizm dəqiqliyi ilə yeganədir. Meydanın kompleks genişlənməsi anlayışından istifadə edilərək kompleks ədədlər meydanı daxil edilir. Nizamlanmış meydanda sıfırdan fərqli istənilən elementin kvadratı -1 olmur. Həqiqi ədədlər meydanı nizamlanmış meydan olduğundan istənilən həqiqi ədədin kvadratı (-1) –dən fərqlidir. onda kompleks genişlənmənin varlığı və yeganəliyi haqda b) təklifinə əsasən R həqiqi ədədlər meydanının kompleks genişlənməsi mövcuddur və izomorfizmə qədər dəqiqliklə yeganədir.

Tərif. Həqiqi ədədlər meydanının kompleks genişlənməsinə kompleks ədədlər meydanı deyilir.

Tutaq ki, $R = \langle R, +, -, \cdot, 1 \rangle$ həqiqi ədədlər meydanıdır və C isə R meydanının kompleks genişlənməsi olan kompleks ədədlər meydanıdır. C meydanın əsas çoxluğunu C ilə işarə edirik. C çoxluğunun elementlərinə kompleks ədədlər deyilir. Kvadratı (-1) –ə bərabər olan kompleks ədədi i ilə işarə edilir. C –nin istənilən z kompleks ədədini $z = a + bi$ şəkildə göstərmək olar, burada $a, b \in R$. Bu cür təsvir z ədədinin cəbri forması adlanır. i –yə kompleks ədədlər meydanının xəyali vahidi deyilir, sonra belə birtəncə alınır.

Tutaq ki, $C = \langle C, +, -, \cdot, 1 \rangle$ kompleks ədədlər meydanıdır, R həqiqi ədədlər meydanının kompleks genişlənməsidir. a, b, c, d –ixtiyari həqiqi ədədlərdir. Onda meydanının kompleks genişlənməsinin tərifindəki I-IV şərtlərinə uyğun olaraq əməllər yerinə yetirilir

5) $a + bi \neq 0$ olarsa, onda $(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{(-b)}{a^2+b^2}i$ doğru olur. Yuxarıda aparılan mühakimələrdən görüldüyü kimi kompleks ədədin daxil edilməsi zərurəti $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin kökünün axtarılması ilə bağlıdır, çünki $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin R –də kökü yoxdur. Lakin R həqiqi ədədlər meydanının elə minimal genişlənməsini qurmaq olar ki, bu genişlənmədə $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin kökü olar [2, səh. 88 – 93]. Bu üsulun mahiyyətini şərh edək.

$$M = R \times R \equiv R^2 \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in R \}$$

çoxluğuna baxılır. Bu çoxluqda aşağıdakı münasibətlər təyin edilir.

I. $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a = c, b = d$ olsun;

II. $\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$

III. $\ominus \langle a, b \rangle = \langle -a, -b \rangle$

IV. $\langle a, b \rangle \odot \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle$.

Göstərmək lazımdır ki, M çoxluğu onda təyin edilmiş toplama və vurmaya nəzərən kommutativ halqadır.

A) Əvvəlcə $\langle M, \oplus, \ominus, \odot, \textcircled{1} \rangle$ cəbrinin halqa olduğu isbat edilir. Doğrudan da, I. Asanlıqla isbat olunur ki, $\langle M, \oplus, \ominus \rangle$ Abel qrupudur. I_1 . Cütlərin toplanması assosiativ əməldir. Doğrudan da, $\langle a, b \rangle \oplus (\langle c, d \rangle \oplus \langle e, f \rangle) = \langle a, b \rangle \oplus \langle c + e, d + f \rangle = \langle a + (c + e), b + (d + f) \rangle = \langle (a + c) + e, (b + d) + f \rangle = \langle a + c, b + d \rangle \oplus \langle e, f \rangle = (\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle) \oplus \langle e, f \rangle$

I_2 . M çoxluğunda \oplus əməlinə nəzərən neytral element $\langle 0,0 \rangle$ elementidir.

I_3 . $\langle a,b \rangle$ elementinin əksi $\ominus \langle a,b \rangle = \langle -a,-b \rangle$.

I_4 . \oplus əməli kommutativ əməldir, yəni, $\langle a,b \rangle \oplus \langle c,d \rangle = \langle c,d \rangle \oplus \langle a,b \rangle$ doğrudur.

II. $\langle M, \odot, \mathbb{1} \rangle$ cəbrinin monoid olduğu isbat edilir.

II₁. \odot assosiativ əməldir, yəni, $\langle M, \odot \rangle$ yarımqrupdur.

II₂. $\langle M, \odot, \mathbb{1} \rangle$ monoiddir, $\mathbb{1}$ –yəni \odot əməlinə nəzərən neytral element $\langle 1,0 \rangle$ cütüdür.

II₃. $\langle M, \odot, \mathbb{1} \rangle$ kommutativ monoiddir, yəni $\forall \langle a,b \rangle, \langle c,d \rangle$ cütləri üçün

$\langle a,b \rangle \odot \langle c,d \rangle = \langle c,d \rangle \odot \langle a,b \rangle$ doğrudur.

III. M çoxluğunda \odot əməli \oplus əməlinə nəzərən distributiv əməldir, yəni

$\forall \langle a,b \rangle, \langle c,d \rangle, \langle e,f \rangle \in M$ cütləri üçün

$$\langle a,b \rangle \odot (\langle c,d \rangle \oplus \langle e,f \rangle) = \langle a,b \rangle \odot \langle c,d \rangle \oplus \langle a,b \rangle \odot \langle e,f \rangle$$

bərabərliyi doğrudur. Nəzərə alsaq ki, $\langle M, \odot, \mathbb{1} \rangle$ kommutativ monoiddir. Onda III şərtin də ödənilməsi göstərilmiş olur. Beləliklə, A) doğru olur.

B) $\langle M, \oplus, \ominus, \odot, \mathbb{1} \rangle$ cəbri meydandır.

Bunu isbat etmək üçün göstərilir ki, $\langle a,b \rangle \odot \langle x,y \rangle = \langle c,d \rangle$ tənliyini həll edərək,

$\langle x,y \rangle = \langle \frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \frac{ad-bc}{a^2+b^2} \rangle$ olduğu tapılır. Bu nəticə onu göstərir ki, M çoxluğunda sıfırdan fərqli hər bir $\alpha = \langle a,b \rangle$ cütünün tərsi var və yeganədir. Həmin tərs element

$\alpha^{-1} = \langle \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \rangle$ kimi olur. Beləliklə, demək olar ki, $M^* = M \setminus \langle 0,0 \rangle$ olarsa, $\langle M^*, \odot \rangle$

qrupdur. Onda yuxarıdakı mülahizələrə əsasən $\langle M, \oplus, \ominus, \odot, \mathbb{1} \rangle$ meydandır.

C) Göstərilir ki, M meydanının altmeydanı olan və R –ə izomorf olan meydan vardır.

$\langle M, \oplus, \ominus, \odot, \mathbb{1} \rangle$ meydanından $\langle \alpha, 0 \rangle \alpha \in R$ şəklindəki bütün cütlər ayrılır. Onlardan düzəldilmiş çoxluq \bar{M} ilə işarə edilir:

$$\bar{M} = \{ \langle a, 0 \rangle \mid a \in R \}$$

Göstərilir ki, $\langle \bar{M}, \oplus \rangle$ cəbri $\langle M, \oplus \rangle$ qrupunun altqrupudur. Buradan çıxır ki,

$\langle \bar{M}, \oplus, \ominus, \odot, \mathbb{1} \rangle$ meydandır. Doğrudan da, $\forall \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle \in \bar{M}$ üçün $\langle a, 0 \rangle \odot \langle b, 0 \rangle =$

$\langle a, b, 0 \rangle \in \bar{M}$ alınır yəni \bar{M} çoxluğu M –də təyin olunmuş \odot əməlinə nəzərən qapalıdır. $\langle 1, 0 \rangle \in \bar{M}$ üçün $(\langle a, 0 \rangle)^{-1} = \langle a^{-1}, 0 \rangle \in \bar{M}$

D) Sonra göstərilir $\bar{M} = \langle \bar{M}, \oplus, \ominus, \odot, \mathbb{1} \rangle$ meydanı R həqiqi ədədlər meydanına izomorfdur. Bunun üçün $\varphi(\langle a, 0 \rangle) = a \in R$ şəklində inikasa baxılır. Bu $\varphi: \bar{M} \rightarrow R$ inikas tərslənmən inikasdır və \bar{M} çoxluğundakı əməlləri dəyişmir. Onda $\bar{M} \cong R$ onda izomorf genişlənmənin varlıq teoreminə əsasən, elə C var ki, o, M –ə izomorfdur. Həmin izomorfizm f olsun. f izomorfizmi φ –nin davamı olacaqdır. Belə ki, $f(\langle a, 0 \rangle) = \varphi(\langle a, 0 \rangle) = a$, xüsusi halda, $f(\langle 1, 0 \rangle) = 1$,

$f(\langle 0, 1 \rangle) = i$. Asanlıqla alınır. $f(\langle 0, 1 \rangle^2) = \varphi(\langle -1, 0 \rangle) = -1$,

$$f(\langle a, b \rangle) = f(\langle a, 0 \rangle \odot \langle 1, 0 \rangle \oplus \langle b, 0 \rangle \odot \langle 0, 1 \rangle) = a + bi$$

Beləliklə, göstərdik ki, $C \cong M$ olduğundan C meydandır;

2) $R \prec C$, 3) $i \in C$ meydanının hər bir α elementi $\alpha = a + bi$ ($a, b \in R$) kimi yazılır. Başqa sözlə $a + bi$ ilə $\langle a, b \rangle$ kompleks eyniləşdirilir. Ona görə $\langle a, b \rangle$ cütünə kompleks ədəd, C –yə isə kompleks ədədlər meydanı deyilir. $\alpha = a + bi$ yazılışında a –həqiqi hissə, bi –xəyali hissə, b isə xəyali hissə əmsalı adlanır. $M \cong C$ olduğundan M –də təyin etdiyimiz I-IV münasibətləri C –də də doğru olacaqdır.

C –də sıfır element $\langle 0, 0 \rangle$ cütünə uyğun olan $0 + 0 \cdot i$ ədədidir. $\alpha = a + bi$ ədədinin əksi $-\alpha = -a - bi$ ədədi olur. Sıfırdan fərqli α ədədinin tərsi $\alpha^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$ kimi müəyyən edilir. Bununla da kompleks ədədin R –in minimal genişlənməsi, yəni cütlər vasitəsi daxil edilməsinin əsas xarakteristik mərhələlərin qısa mahiyyəti şərh edildi.

Nəticə

Aparılan araşdırmalar nəticəsində aşağıdakı nəticələr alınmışdır.

1. Həqiqi ədədin kvadrat kökü anlayışının tərfi ilə və onun işarəsinin diskriminant mənfii olduqda saxlanması ziddiyət yaradır. Buna diqqət yetirilməsi koorektliyin pozulmasına gətirir.
2. Kompleks ədədlər meydanında kvadrat üçhəddinin köklərinin tapılması prosesində, D

kompleks yaxud mənfi ədəd olduqda qeyd olunmalıdır ki, \sqrt{D} işarəsi formal xarakter daşıyır, şərti razılaşmalıdır. Mahiyyəti o deməkdir ki, \sqrt{D} kvadratı D –yə bərabər olan ədəddir, xüsusi halda, $\sqrt{-1} = i$ yox, $i^2 = -1$ yazılışı düzgün sayılır. Bu şərti razılaşmadır.

3. Cəbri şəkildə yazılmış kompleks ədəddən ümumiyyətlə, istənilən natural dərəcədən almaq

üçün, verilmiş kompleks ədədi triqonometrik şəkildə yazaraq, tələb olunan əməliyyatın aparılması, səhv buraxılması riskini azaldır.

4. Ali pedaqoji məktəblərin Cəbr kursunda kompleks ədədlərin daxil edilməsi həqiqi ədədlərin

minimal genişlənməsi və kompleks genişlənməsi ilə daxil edilir. Təcrübə göstərir ki, minimal genişlənmə ilə daxil edilməni tələbələr daha çox maraqlandırır.

5. Müşahidələr nəticəsində müəyyən olunmuşdur ki, anlayış və mülahizələrin ciddi riyazi aspektlə öyrənilməsi tələbə və şagirdlərin təfəkkür fəaliyyətinə və yaradıcılıq qabiliyyətinə müsbət təsir edir.

Ədəbiyyat siyahısı

1. Abdullayev F.S., İbrahimov H.J., Orucov Q.Ə., Səlimov F.H. Analitik funksiyalardan mühazirələr. Dərs vəsaiti.-Bakı: API,-1985.-121 s.
2. Baxşəliyev Y.R., Əbdülkərimli L.Ş. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi kursu. Dərs vəsaiti.-Bakı: Nurlan,-2008,-506s.
3. Qəhrəmanov N.M., Kərimov M.A., Hüseynov İ.H. Riyaziyyat 8.dərslik.-Bakı: Radius,-2015-224s.
4. Qəhrəmanova N.M., Kərimov M.A., Hüseynov İ.H. Riyaziyyat 10. Dərslik.-Bakı: Radius,-2017,-320s
5. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – Москва, –1974. – 576 с.
6. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Учебная пособие для педагогических институтов. – Москва: Высшая школа, –1979. 559с.

SUMMARY

THE INCLUSION OF COMPLEX NUMBERS IN THE TEACHING OF MATHEMATICS AND PROBLEMS OF FINDING THE ROOTS OF A QUADRATIC TRINOMIAL

The necessary material on complex numbers is provided in the mathematics subject of secondary schools. The introduction of this material is related to a number of reasons, as well as the existence of the roots of the quadratic trinomial and the procedure for finding them. First, the idea of including complex numbers in the teaching of mathematics in secondary schools, as well as in elementary mathematics, was investigated. After that, the problem of finding the roots of a quadratic trinomial by the method of dividing a perfect square was investigated and conditional agreements that could be overlooked in this process were explained.

In the end, the methods of entering complex numbers and the issues related to them in teaching the algebra course of higher pedagogical schools were explained in a strictly mathematical way.

Key words: *complex number, roots of quadratic trinomial, conditional agreement, complex expansion, minimal expansion*

РЕЗЮМЕ

ВКЛЮЧЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ И ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

необходимый материал по комплексным числам дается в предмете математики средней школы. Введение данного материала связано с рядом причин, а также с существованием корней квадратного трёхчлена и процедурой их нахождения. Сначала исследовалась идея включения комплексных чисел в преподавание математики в средней школе, а также в элементарную математику. После этого была исследована задача нахождения корней квадратного трёхчлена методом деления полного квадрата и объяснены условные соглашения, которые можно было не заметить в этом процессе.

В конце концов, способы ввода комплексных чисел и связанные с ними вопросы в преподавании курса алгебры в вузах были объяснены строго математически.

Ключевые слова: *комплексное число, корни квадратного трёхчлена, условное согласие, комплексное разложение, минимальное разложение.*